Математические структуры и моделирование
2019. № 2(50). С. 66–78

УДК 550.37 : 550.837
DOI: 10.25513/2222-8772.2019.2.66-78

ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ДИПОЛЕЙ В ВЕРТИКАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

С.А. Терентьев
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: sa.terentyev@gmail.com
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Электромагнитное поле в задачах электроразведки часто представляется в виде интегралов с быстроосцилирущим ядром. При вычислении этих интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в плоскость комплексного переменного. В статье изучена допустимая область деформации контура интегрирования в случае неоднородной среды. Источник поля — гармонический вертикальный электрический или магнитный диполь.

Ключевые слова: электроразведка, электромагнитное поле вертикального электрического или магнитного диполя, быстроосцилирующие интегралы, деформация контура, комплексная плоскость, отсутствие особых точек, область деформации.

1. Введение

Мы изучаем электромагнитное поле в слоистой горизонтальной среде, заданное интегралом (см. S 5):

$$\int_0^{+\infty} K(x,y,\lambda)u(z,\lambda)d\lambda.$$

Функцию K называем ядром интегрального оператора, а $u(z,\lambda)$ — спектральной плотностью.

Продолжим λ в комплексную плоскость

$$\mathbb{C} = \{\lambda = \lambda_x + i\lambda_y : \lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{R}\}.$$

Область, лежащую в плоскости $\mathbb{C}$, в которой плотность $u(z,\lambda)$ не имеет особенностей по λ, будем обозначать через D_λ.

Ядро $K(z,\lambda)$ — это быстро осциллирующая по λ функция. При вычислении таких интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в комплексную область D_λ изменения переменной λ. В связи с этим необходимо прежде всего определить область D_λ, в которой подынтегральная функция $u(z,\lambda)$ не имеет особенностей по D_λ.

В этой статье мы определяем область D_λ для электромагнитного поля, создаваемого вертикальным гармоническим электрическим или магнитным диполем.

Данная статья продолжает исследования, изложенные в статье [1]. Приведённые результаты были анонсированы в [2].

2. Основные уравнения

Уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned}
&rot\ \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{j}^m,\\
&rot\ \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathbf{j}^e,\\
&div\ \mathcal{D} = \rho^e,\\
&div\ \mathbf{B} = \rho^m,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$ — векторы объёмной плотности электрического и магнитного сторонних токов, которые возбуждаются полями, не учитываемые в искомом электромагнитном поле; ρ^e, ρ^m — объёмные плотности электрического и магнитного зарядов.

Принимаем, что

$$\mathcal{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{2}$$

Будем изучать гармонические источники и поля, т. е. предполагаем следующую зависимость от времени

$$\mathbf{M} \to \mathbf{M}e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Тогда уравнения (1) с учётом (2), (3) примут вид:

$$rot\ \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{j}^m, \tag{4}$$

$$rot\ \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \tag{5}$$

$$div\ \mathbf{E} = \rho^e, \tag{6}$$

$$div\ \mu\mathbf{H} = \rho^m. \tag{7}$$

Пусть имеется неоднородная среда, ограниченная плоскими поверхностями раздела $z = z_0, z = z_1$, где $z_0 < z_1$ (ось z направлена вверх, рис. 1). Параметры среды σ, μ, ε будем считать функциями переменной z, т. е.

$$\sigma = \sigma(z), \quad \mu = \mu(z), \quad \varepsilon = \varepsilon(z). \tag{8}$$

$$\sigma, \mu, \varepsilon \in C^1(\mathbb{R}),$$

$$\sigma(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{R}.$$

При $z > z_1$ и $z < z_0$ среда предполагается однородной с $\sigma = \sigma_i$, $\mu = \mu_i$.

Источник электромагнитного поля находится в точке с декартовыми координатами $(0, 0, 0)$.

На поверхностях раздела $z = z_i$ $(i = 0, 1)$ ставим граничные условия для электромагнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$.

Из (5) имеем

$$(\sigma - i\omega\varepsilon)E_z + j_z^e = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}. \tag{9}$$

Далее будем совершать преобразования Фурье вида

$$\widehat{f}(\xi, \eta, \zeta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z)e^{i(\xi x + \eta y)}dxdy.$$

Тогда (9) перепишем в виде

$$(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e = -i\xi\widehat{H}_y + i\eta\widehat{H}_x. \tag{10}$$

Применяя к (5) операцию div, получим

$$0 = div\ rot\ \mathbf{H} = div(\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E} + div\ \mathbf{j}^e = 0$$

или

$$\frac{\partial(\sigma - i\omega\varepsilon)E_z}{\partial z} = -div\ \mathbf{j}^e - \frac{\partial(\sigma - i\omega\varepsilon)E_x}{\partial x} - \frac{\partial(\sigma - i\omega\varepsilon)E_y}{\partial y}.$$

Откуда

$$\frac{d}{dz}(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z = -\widehat{div\ \mathbf{j}^e} + i\xi(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_x + i\eta(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_y,$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\frac{d}{dz}(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z\right] = -\frac{d}{dz}\left[\frac{\widehat{div\ \mathbf{j}^e}}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\right] + i\xi\frac{d\widehat{E}_x}{dz} + i\eta\frac{d\widehat{E}_y}{dz}. \tag{11}$$

Из (4)

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x - j_x^m,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu H_y - j_y^m,$$

или

$$-i\eta\widehat{E}_z - \frac{d\widehat{E}_y}{dz} = i\omega\mu\widehat{H}_x - \widehat{j}_x^m,$$

$$\frac{d\widehat{E}_x}{dz} + i\xi\widehat{E}_z = i\omega\mu\widehat{H}_y - \widehat{j}_y^m.$$

Умножая первое из этих уравнений на $(-i\eta)$, а второе на $i\xi$ и складывая полученные уравнения, имеем:

$$i\xi\frac{d\widehat{E}_x}{dz}+i\eta\frac{d\widehat{E}_y}{dz}-(\xi^2+\eta^2)\widehat{E}_z=i\omega\mu[i\xi\widehat{H}_y-i\eta\widehat{H}_x]+i\eta\widehat{j}_x^m-i\xi\widehat{j}_y^m. \tag{12}$$

Из (10), (11), (12) следует

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(\sigma-i\omega\varepsilon)}\frac{d}{dz}(\sigma-i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z\right]-(\xi^2+\eta^2)\widehat{E}_z=-\frac{d}{dz}\left[\frac{\widehat{div\ \mathbf{j}^e}}{(\sigma-i\omega\varepsilon)}\right]-$$

$$-i\omega\mu[(\sigma-i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z+\widehat{j}_z^e]+i\eta\widehat{j}_x^m-i\xi\widehat{j}_y^m,$$

или

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(\sigma-i\omega\varepsilon)}\frac{d}{dz}(\sigma-i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z\right]-(\lambda^2+k^2)\widehat{E}_z=$$

$$=-\frac{d}{dz}\left[\frac{\widehat{div\ \mathbf{j}^e}}{(\sigma-i\omega\varepsilon)}\right]-i\omega\mu\widehat{j}_z^e+i\eta\widehat{j}_x^m-i\xi\widehat{j}_y^m, \tag{13}$$

где

$$\lambda^2=\xi^2+\eta^2,\quad k^2=-(i\omega\mu\sigma+\omega^2\varepsilon\mu).$$

Получим уравнение для $\widehat{E}_z$, аналогичное уравнению (13). Из (4) имеем:

$$i\omega\mu H_z-j_z^m=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

или

$$i\omega\mu\widehat{H}_z-\widehat{j}_z^m=-i\xi\widehat{E}_y+i\eta\widehat{E}_x. \tag{14}$$

Применяя div к (4),

$$div\ i\omega\mu\mathbf{H}=div\ \mathbf{j}^m$$

или

$$\frac{\partial(\mu H_z)}{\partial z}=\frac{div\ \mathbf{j}^m}{i\omega}-\frac{\partial(\mu H_x)}{\partial x}-\frac{\partial(\mu H_y)}{\partial y},$$

$$\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz}=\frac{\widehat{div\ \mathbf{j}^m}}{i\omega}+i\xi\widehat{H}_x+i\eta\widehat{H}_y,$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\mu}\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz}\right]=\frac{1}{i\omega}\frac{d}{dz}\left[\frac{\widehat{div\ \mathbf{j}^m}}{\mu}\right]+i\xi\frac{d\widehat{H}_x}{dz}+i\eta\frac{d\widehat{H}_y}{dz}. \tag{15}$$

Из (5) имеем

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=(\sigma-i\omega\varepsilon)E_x+j_x^e,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=(\sigma-i\omega\varepsilon)E_y+j_y^e$$

или

$$-i\eta\widehat{H}_z-\frac{d\widehat{H}_y}{dz}=(\sigma-i\omega\varepsilon)\widehat{E}_x+\widehat{j}_x^e,$$

$$\frac{d\widehat{H}_x}{dz} + i\xi\widehat{H}_z = (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_y + \widehat{j}^e_y.$$

Умножим первое уравнение на $(-i\eta)$, а второе на $i\xi$ и сложим полученные уравнения. Имеем

$$i\xi\frac{d\widehat{H}_x}{dz} + i\eta\frac{d\widehat{H}_y}{dz} - (\xi^2+\eta^2)\widehat{H}_z = (\sigma - i\omega\varepsilon)[i\xi\widehat{E}_y - i\eta\widehat{E}_x] + i\xi\ \widehat{j}^e_y - i\eta\ \widehat{j}^e_x. \quad (16)$$

Из (14), (15), (16) выводим

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\mu}\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz}\right] - (\xi^2+\eta^2)\widehat{H}_z = \frac{1}{i\omega}\frac{d}{dz}\left[\frac{\widehat{div\ \mathbf{j}^m}}{\mu}\right] -$$

$$-(\sigma - i\omega\varepsilon)[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}^m_z] + i\xi\ \widehat{j}^e_y - i\eta\ \widehat{j}^e_x$$

или

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\mu}\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz}\right] - (\lambda^2+k^2)\widehat{H}_z = \frac{1}{i\omega}\frac{d}{dz}\left[\frac{\widehat{div\ \mathbf{j}^m}}{\mu}\right] +$$

$$+(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{j}^m_z + i\xi\ \widehat{j}^e_y - i\eta\ \widehat{j}^e_x. \quad (17)$$

Осталось найти $\widehat{H}_x, \widehat{H}_y, \widehat{E}_x, \widehat{E}_y$.

Применяя преобразование Фурье к (6), (7), получим

$$i\xi\mu\widehat{H}_x + i\eta\widehat{H}_y = -\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} + \widehat{\rho}^m, \quad (18)$$

$$i\xi\varepsilon\widehat{E}_x + i\eta\widehat{E}_y = -\frac{d(\varepsilon\widehat{E}_z)}{dz} + \widehat{\rho}^e. \quad (19)$$

Из (10) и (16) получаем

$$(i\xi^2+i\eta^2)\mu\widehat{H}_y = -\xi\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} + \xi\widehat{\rho}^m + (\sigma - i\omega\varepsilon)\mu\eta\widehat{E}_z + \mu\eta\widehat{j}^e_z,$$

$$(i\xi^2+i\eta^2)\mu\widehat{H}_x = -\eta\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} + \eta\widehat{\rho}^m - (\sigma - i\omega\varepsilon)\mu\xi\widehat{E}_z - \mu\xi\widehat{j}^e_z,$$

то есть

$$\begin{cases} \widehat{H}_x = \dfrac{1}{i\mu\lambda^2}\left[-\eta\dfrac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} - (\sigma - i\omega\varepsilon)\mu\xi\widehat{E}_z + \eta\widehat{\rho}^m - \mu\xi\ \widehat{j}^e_z\right], \\ \widehat{H}_y = \dfrac{1}{i\mu\lambda^2}\left[-\xi\dfrac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz} + (\sigma - i\omega\varepsilon)\mu\eta\widehat{E}_z + \xi\widehat{\rho}^m + \mu\eta\ \widehat{j}^e_z\right]. \end{cases} \quad (20)$$

Аналогично

$$\begin{cases} \widehat{E}_x = \dfrac{1}{i\varepsilon\lambda^2}\left[-\xi\dfrac{d(\varepsilon\widehat{E}_z)}{dz} + \xi\widehat{\rho}^e + i\omega\mu\varepsilon\eta\widehat{H}_z - \varepsilon\eta\ \widehat{j}_z^m\right], \\ \\ \widehat{E}_y = \dfrac{1}{i\varepsilon\lambda^2}\left[-\eta\dfrac{d(\varepsilon\widehat{E}_z)}{dz} + \eta\widehat{\rho}^e - i\omega\mu\varepsilon\xi\widehat{H}_z + \varepsilon\xi\ \widehat{j}_z^m\right]. \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, достаточно знать $\widehat{H}_z, \widehat{E}_z$, остальные компоненты вычисляются по формулам (20) и (21).

3. Вертикальный электрический диполь

В этом параграфе подробно изучим электромагнитное поле, создаваемое вертикальным электрическим диполем, находящимся в неоднородной среде.

Для вертикального электрического диполя

$$\mathbf{j}^m = 0, \quad \rho^m = 0, \quad \mathbf{j}^e = (0, 0, \delta(x)\delta(y)\delta(z)).$$

Следовательно, (13) и (17) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\frac{d}{dz}(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z\right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{E}_z =$$

$$= -\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon}\frac{d\widehat{j}_z}{dz}\right] - i\omega\mu\widehat{j}_z^e, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\mu}\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz}\right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{H}_z = 0. \tag{23}$$

Уравнение (22) удобно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\frac{d}{dz}[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e]\right] - \frac{\lambda^2 + k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon}\left[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e\right] =$$

$$= -\left[i\omega\mu + \frac{\lambda^2 + k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon}\right]\widehat{j}_z^e = -\frac{\lambda^2}{\sigma - i\omega\varepsilon}\widehat{j}_z^e. \tag{24}$$

Граничные условия здесь такие:

$$\begin{cases} [(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e]_{z=z_i} = 0, \\ \left[\dfrac{d}{dz}[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^e]\right]_{z=z_i} = 0, \\ (i = 0, 1) \end{cases} \tag{25}$$

(это вытекает из (10)) и

$$\begin{cases} [\mu\widehat{H}_z]_{z=z_i} = 0, \\ \left[\dfrac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz}\right]_{z=z_i} = 0, \\ (i = 0, 1) \end{cases} \tag{26}$$

где квадратные скобки означают скачок

$$[f(z)]_{z=z_i} = f(z_i + 0) - f(z_i - 0).$$

Кроме того, принимаем условия на бесконечности:

$$|\widehat{E}_z|,\ |\widehat{H}_z| \to 0 \text{ при } z \to \infty. \tag{27}$$

Из (23), (26), (27) следует, что

$$\mu\widehat{H}_z \equiv 0. \tag{28}$$

Задачу (24), (25), (27) для функции

$$u \equiv (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}^e_z \tag{29}$$

заменяем задачей вида

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon}\dfrac{du}{dz}\right] - \dfrac{\lambda^2 + k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon}u = 0, \\ \\ \text{условие (25)} \end{cases} \tag{30}$$

с дополнительными граничными условиями

$$[u]_{z=0} = 0, \tag{31}$$

$$\left[\frac{du}{dz}\right]_{z=0} = -\lambda^2 \tag{32}$$

на фиктивной поверхности раздела $z = 0$.

Кроме того, полагаем, что

$$|u| \to 0 \text{ при } z \to \infty. \tag{33}$$

Умножим (30) на $\overline{u}$ и проинтегрируем по z

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon}\frac{du}{dz}\right]dz - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^2 + k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon}|u|^2 dz = 0,$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\overline{u}\frac{du}{dz}\Big|_{-\infty}^{-\delta}+\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\overline{u}\frac{du}{dz}\Big|_{\delta}^{+\infty}\right\}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\left|\frac{du}{dz}\right|^2dz=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^2+k^2}{\sigma-i\omega\varepsilon}|u|^2dz.$$

С учётом (33) получаем

$$\frac{1}{\sigma(0)-i\omega\varepsilon(0)}\left[\overline{u}(-0)\frac{du}{dz}(-0)-\overline{u}(+0)\frac{du}{dz}(+0)\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma+i\omega\varepsilon}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2}\left|\frac{du}{dz}\right|^2dz+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\lambda^2+k^2)(\sigma+i\omega\varepsilon)}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2}|u|^2dz.$$

Из (31), (32) следует

$$\frac{\lambda^2}{\sigma(0)-i\omega\varepsilon(0)}\overline{u}(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma+i\omega\varepsilon}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2}\left|\frac{du}{dz}\right|^2dz+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\lambda^2+k^2)(\sigma+i\omega\varepsilon)}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2}|u|^2dz. \quad (34)$$

Полагаем, что

$$\lambda=\lambda_x+i\lambda_y \quad \text{и} \quad u=u_1+iu_2.$$

Тогда реальная часть уравнения (34) имеет вид:

$$\frac{(\sigma u_1+\omega\varepsilon u_2)|_{z=0}(\lambda_x^2-\lambda_y^2)-2\lambda_x\lambda_y(\omega\varepsilon u_1-\sigma u_2)|_{z=0}}{\sigma^2(0)+\omega^2\varepsilon^2(0)}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2}\left|\frac{du}{dz}\right|^2dz+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma[\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu]-\omega\varepsilon[2\lambda_x\lambda_y-\sigma\mu]}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2}|u|^2dz. \quad (35)$$

Пусть

$$\boxed{D_\lambda=\{(\lambda_x,\lambda_y)\in\mathbb{R}^2:\sigma[\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu]>\omega\varepsilon[2\lambda_x\lambda_y-\sigma\mu] \text{ для } \forall z\in\mathbb{R}\}.}$$

Из (35) получаем

$$0\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{du}{dz}\right|^2dz\leqslant\alpha^{-1}Q(z) \text{ при } \lambda\in D_\lambda,$$

где

$$\alpha=\inf_{z\in\mathbb{R}}\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2\varepsilon^2},$$

$$Q(\lambda) = \frac{[\sigma(0)u_1(0) + \omega\varepsilon(0)u_2(0)](\lambda_x^2 - \lambda_y^2) - 2\lambda_x\lambda_y[\omega\varepsilon(0)u_1(0) - \sigma(0)u_2(0)]}{\sigma^2(0) + \omega^2\varepsilon^2(0)}, \quad (36)$$

причём

$$Q(\lambda) \geqslant 0 \text{ при } \lambda \in D_\lambda.$$

Если теперь повторить рассуждения из [1], используя (35) вместо (2.39) и (36) вместо (2.40), то получим, что справедлива

Теорема 1. *При условии* $\alpha > 0$ *классическое решение* $u(z,\lambda)$ *краевой задачи* (30)–(33) *не имеет особенностей по переменной* $\lambda \in D_\lambda$.

Следствие 1. Электромагнитное поле $\widehat{E}(\xi,\eta,z,\lambda), \widehat{H}(\xi,\eta,z,\lambda)$ не имеет особенностей по λ в области D_λ.

В самом деле, $\widehat{j_z^e}$ не зависит от λ, поэтому из теоремы 1 следует, что $\widehat{E}_z = (\sigma - i\omega\varepsilon)^{-1}[u - \widehat{j_z^e}]$ не имеет особенностей по λ в D_λ. Остальное получаем из (20), (21) и (28).

4. Вертикальный магнитный диполь

Для вертикального магнитного диполя

$$\rho^e = 0, \quad \mathbf{j}^e = 0,$$

$$\mathbf{j}^m = (0, 0, \delta(x)\delta(y)\delta(z)).$$

В таком случае (17) и (13) примут вид:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\mu}\frac{d(\mu\widehat{H}_z)}{dz}\right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{H}_z = \frac{1}{i\omega}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\mu}\frac{d\widehat{j_z^m}}{dz}\right] + (\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{j_z^m}, \quad (37)$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon}\frac{d}{dz}(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z\right] - (\lambda^2 + k^2)\widehat{E}_z = 0. \quad (38)$$

Причём для (38) имеем граничные условия (25) (где уже $\widehat{j_z^e} \equiv 0$).

Из (28), (25) следует

$$\widehat{E}_z \equiv 0. \quad (39)$$

Уравнение (37) перепишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\mu}\frac{d}{dz}\left[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j_z^m}\right]\right] - \frac{\lambda^2 + k^2}{\mu}[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j_z^m}] = \frac{\lambda^2}{\mu}\widehat{j_z^m}. \quad (40)$$

Граничные условия для (40) имеют вид:

$$\begin{cases} [i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j_z^m}]_{z=z_i} = 0, \\ \left[\dfrac{d}{dz}(i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j_z^m})\right]_{z=z_i} = 0, \\ (i = 0, 1) \\ |\widehat{H}_z| \to 0 \text{ при } z \to \infty. \end{cases} \quad (41)$$

Вместо задачи (40), (41) рассмотрим для функции

$$u = i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^m$$

следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{1}{\mu}\dfrac{du}{dz}\right] - \dfrac{\mu^2+k^2}{\mu}u = 0, \\ \text{условия}(41), \end{cases} \tag{42}$$

с дополнительными условиями

$$\begin{cases} [u]_{z=0} = 0, \\ \left[\dfrac{du}{dz}\right]_{z=0} = \lambda^2, \\ |u| \to 0 \text{ при } z \to \infty. \end{cases} \tag{43}$$

Умножая (42) на $\overline{u}$ и интегрируя, получим

$$-\left[\frac{1}{\mu}\overline{u}\frac{du}{dz}\right]_{z=0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\mu}\left|\frac{du}{dz}\right|^2 dz + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^2+k^2}{\mu}|u|^2 dz. \tag{44}$$

Полагаем, что

$$\lambda = \lambda_x + i\lambda_y \quad \text{и} \quad u = u_1 + iu_2.$$

Тогда из (44) с учётом (43) следует

$$-Re\frac{1}{\mu(0)}\overline{u}(0)\lambda^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\mu}\left|\frac{du}{dz}\right|^2 dz + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda_x^2-\lambda_y^2-\omega^2\varepsilon\mu}{\mu}|u|^2 dz. \tag{45}$$

Пусть

$$\widetilde{Q}(\lambda) = -Re\frac{1}{\mu(0)}\overline{u}(0)\lambda^2 = -\frac{1}{\mu(0)}[(\lambda_x^2-\lambda_y^2)u_1(0) + 2\lambda_x\lambda_y u_2(0)].$$

Рассмотрим область

$$\boxed{\widetilde{D}_\lambda = \{(\lambda_x,\lambda_y)\in\mathbb{R}^2 : \lambda_x^2-\lambda_y^2 > \omega^2\varepsilon\mu \text{ для } \forall z\in\mathbb{R}\}.}$$

Тогда из (45) выводим, что

$$\widetilde{Q}(\lambda) \geqslant 0 \text{ для } \lambda\in\widetilde{D}_\lambda. \tag{46}$$

Пусть

$$\widetilde{\alpha} = \inf_{z\in\mathbb{R}}\frac{1}{\mu(z)} > 0.$$

Тогда из (45) получаем неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{du}{dz}\right|^2 dz \leqslant \widetilde{\alpha}^{-1}\widetilde{Q}(\lambda) \text{ при } \lambda \in \widetilde{D}_\lambda.$$

Теорема 2. *При условии* $\widetilde{\alpha} > 0$ *классическое решение* $u(z,\lambda)$ *краевой задачи* (42)–(43) *не имеет особенностей по переменной* $\lambda \in \widetilde{D}_\lambda$.

Следствие 2. Электромагнитное поле $\widehat{E}(\xi,\eta,z,\lambda), \widehat{H}(\xi,\eta,z,\lambda)$ не имеет особенностей по λ в области $\widetilde{D}_\lambda$.

Доказательство теоремы 2 и следствия 2 – это повторение рассуждений из статьи [1] (с заменой (2.39) на (45) и (2.40) на (46)).

5. Вычисление электромагнитного поля на ЭВМ

Как следует из S 1 поле f (=$\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$) задаётся интегралом

$$f(x,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi,\eta,\zeta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta.$$

При этом достаточно знать $\widehat{E}_z, \widehat{H}_z$, а остальные компоненты вычисляются по формулам (20), (21). Тогда зависимость $\widehat{f}$ от ξ, η выражается либо через $\lambda^2 = \xi^2+\eta^2$, либо в виде множителей $i\xi$, $i\eta$. Характер зависимости от $i\xi$, $i\eta$ таков, что при переходе от $\widehat{f}$ к f от множителей $i\xi$, $i\eta$ можно избавиться, представив интегралы, например следующего вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi F(\lambda)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta$$

как

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta.$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta = 2\pi\int\limits_{0}^{+\infty} F(\lambda)\lambda I_0(\lambda r)d\lambda,$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

то поле f выражается в виде суммы интегралов вида:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d^k\widehat{f}}{dz^k}\mathcal{D}[\lambda I_0(\lambda r)]d\lambda, \quad k \leqslant 1, \tag{47}$$

где $\mathcal{D}$ – производная по x или y. Но $\frac{d^k \widehat{f}}{dz^k}$ не имеет особенностей по λ при $\lambda \in D_\lambda$. Поэтому можно деформировать контур интегрирования в D_λ. При пренебрежимо малом $\omega\varepsilon$ область D_λ совпадает с

$$\{(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{R}^2 : |\lambda_z| > |\lambda_y|\},$$

которая вполне хороша с точки зрения вычисления интегралов (47) на ЭВМ [3].

Литература

1. Терентьев С.А., Гуц А.К. Исследования особенностей спектральной плотности для электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде // Математические структуры и моделирование. 2018. № 4(48). С. 61–77.
2. Гуц А.К., Терентьев С.А. Исследования особенностей спектральной плотности для электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде // Сб.: Автоматизация анализа и синтеза структур ЭВМ и вычислительных алгоритмов. Омск : ОмПИ, 1982. С. 78–80.
3. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск : Изд-во «Наука», Сибирское отделение, 1975.

THE SPECTRAL DENSITY OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD FOR ELECTRICAL AND MAGNETIC DIPOLES IN A VERTICALLY INHOMOGENEOUS CONDUCTIVE MEDIUM

S.A. Terentyev
PhD. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: sa.terentyev@gmail.com
A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The electromagnetic field in electrical exploration problems is often represented as integrals with a fast-oscillating nucleus. When calculating these integrals on a computer, it is necessary to deform the contour of integration into the plane of the complex variable. The article studies the allowable deformation region of the integration contour in the case of a non-uniform medium. The source of the field is a vertical dipole. A similar problem was solved for a horizontally layered medium with a harmonious electrical or magnetic dipole as a source.

Keywords: Electrical exploration, electromagnetic field of vertical electric or magnetic dipole, fast-oscillating integrals, deformation contour, complex plane, absence of singular points, deformation domain.

References

1. Terent'ev S.A. and Guts A.K. Issledovaniya osobennostei spektral'noi plotnosti dlya elektromagnitnogo polya v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 4(48), pp. 61–77. (in Russian)
2. Guts A.K. and Terent'ev S.A. Issledovaniya osobennostei spektral'noi plotnosti dlya elektromagnitnogo polya v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Sb.: Avtomatizatsiya analiza i sinteza struktur EVM i vychislitel'nykh algoritmov, Omsk, OmPI Publ., 1982, pp. 78–80. (in Russian)
3. Tabarovskii L.A. Primenenie metoda integral'nykh uravnenii v zadachakh geoelektriki. Novosibirsk, Nauka Publ., Sibirskoe otdelenie, 1975. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 23.05.2019