

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ — ФИЛИАЛ ВНЦ РАН
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВНЦ РАН
НАУЧНО — ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР СОГУ
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ИНСТИТУТ
ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ РАБОТНИКОВ ОБРАЗОВАНИЯ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
НАУК ИМЕНИ И. И. ВОРОВИЧА ЮФУ

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.
ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

Тезисы докладов
XVII Международной научной конференции
(РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня–5 июля 2023 г.)

Владикавказ
2023

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОДОРОДИЯ ПОЧВЫ,
ИСПОЛЬЗУЮЩЕЕ ТЕОРИЮ КАТАСТРОФ¹

А. К. Гуц (Россия, Сочи; ФИЦ СНЦ РАН),
Л. А. Володченкова (Россия, Омск; ОмГУ им. Ф. М. Достоевского)

Разрабатываются математические модели плодородия почвы в рамках теории катастроф. Используются высшие ростки катастроф. Рассматриваются различные варианты учета гумуса и антропогенных воздействий на почву, а также влияния растительности. Имеющееся в теории разнообразие канонических ростков катастроф и их универсальных деформаций позволяет избирательно подходить к формулировке моделей плодородия почвы для разных природно-климатических зон. Моделирование плодородия почвы предполагает выделение числовой переменной $x(t)$, значения которой коррелируют с данными признанной бонитировочной шкалы. Таких шкал может быть не одна, поскольку трудно составить единую бонитировочную шкалу, которая охватила бы все разнообразие почв России. Как правило, используются местные, региональные бонитировочные шкалы. Они могут содержать различное число параметров, характеризующих свойства почвы. Например, шкала А. С. Серого содержит 5 показателей состояния почвы (включая гумус), а шкала Н. С. Лебедева — 13 показателей (включая гумус). Эти параметры мы рассматриваем как управляющие параметры, входящие в системы дифференциальных уравнений для величины плодородия почвы $x(t)$, биомассы растений $b(t)$ и, возможно, для величины $y(t)$, которая как показано ниже может описывать гумус.

Предлагаемая модель содержит уравнения для плодородия почвы и для биомассы и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}, u), & \mathbf{x} = (x, y), \\ \frac{db}{dt} = R(b, x, y, v), \end{cases} \quad (1)$$

$$V(\mathbf{x}, u) = CG(l) + \underbrace{\lambda(u)y^2}_{\text{морсова часть}} + F(\mathbf{x}, u),$$

где $CG(l)$ — *росток катастрофы*, и $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — его *универсальная деформация* (возмущение).

В работе построены несколько моделей плодородия почвы для различных ростков катастрофы. Приведем лишь две модели системы «почва–растительность». Они интересны тем, что подсказывают, что гумус может быть переменной модели, а не только управляющим параметром.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № госрегистрации 122032300363-3).

1. Модель A_5 (бабочка, 4 параметра). При выборе ростка A_6 — «бабочка» с морсовой частью y^2 вида $V(x, y, u) = x^6 + y^2 + u_1x^4 + u_2x^3 + u_3x^2 + u_4x$, система (1) принимает вид (параметры u_i переобозначены, уточнено уравнение для биомассы):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -6x^5 + u_1x^3 + u_2x^2 + u_3x + u_4, \\ \frac{dy}{dt} = -2y, \\ \frac{db}{dt} = y \left(1 - \frac{b}{K}\right) b - wba, \end{cases}$$

где $w > 0$ — вода, точнее ее нехватка, и $a > 0$ — влияние человека, в данном случае — пагубное.

Мы видим, что $y(t) = Ce^{-2t}$, т. е. имеется компонента в почве, которая постоянно убывает. Что моделирует переменная y ? Известно, что «если удобрения не применяются, то содержание гумуса снижается, и это подтверждают исследования во всех зонах нашей страны» [1]. Таким образом, переменная y соответствует гумусу. Иначе говоря, гумус — это не управляющий параметр u_5 , а переменная модели. Управляющими параметрами служат по шкале А. С. Серого

$$u_1 = азот, \quad u_2 = фосфор, \quad u_3 = калий, \quad u_4 = ММЗПВ.$$

Построенная модель — это модель плодородия почвы *без внесения удобрений*. Более того, переменная y не входит в первое уравнение, т. е. гумус уже не влияет на плодородие. Система явно описывает истощение, умирание как почвы, так и растительности.

Модель A_5 можно переписать на случай 12 управляющих параметров из шкалы Н. С. Лебедева с переменной y (гумус), используя росток катастрофы A_{13} , также описывающую истощение почвы.

2. Модель $W_{1,0}$ (2 модуля a_1, a_2 , 12 параметров). Более общая модель плодородия почвы, в которой гумус — переменная y , модуль a_1 — антропогенный фактор общего характера, а модуль a_2 — влияние людей на гумус, плюс 12 управляющих параметров, использует бимодальный росток катастрофы $W_{1,0}$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -[4x^3 + 2(a_1 + a_2y)xy^3 + u_1 + 2u_3x + u_4y + 2u_6xy + \\ \qquad \qquad \qquad + u_7y^2 + 2u_9xy^2 + u_{11}y^3 + u_{12}y^4], \\ \frac{dy}{dt} = -[a_2x^2y^3 + 3(a_1 + a_2y)x^2y^2 + 6y^5 + u_2 + u_4x + 2u_5y + u_6x^2 + \\ \qquad \qquad \qquad + 2u_7xy + 3u_8y^2 + 2u_9x^2y + 4u_{10}y^3 + 3u_{11}xy^2 + 4u_{12}xy^3], \\ \frac{db}{dt} = r(x) \left(1 - \frac{b}{K}\right) b - vba_1. \end{cases}$$

В работе изучаются свойства этой модели, показывается ее адекватность.

Литература

1. Минеев В. Г. Агрохимия.— М.: Изд-во МГУ, 2004.—92 с.