Математические структуры и моделирование
2020. № 1(53). С. 77–81

УДК 519 + 635.8 : 632.4
DOI 10.24147/2222-8772.2020.1.77-81

АНАЛИЗ РОСТА МИЦЕЛИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ЧАНТЕРА-ТОРНЛИ

Л.А. Володченкова
к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Модель роста мицелия Чантера-Торнли анализируется с точки зрения математической теории бифуркаций. Показано, что можно наблюдать не только непрерывный рост мицелия, но и его скачкообразную эволюцию.

Ключевые слова: мицелий, модель Чантера-Торнли, скачкообразный рост, теория бифуркаций.

Выращивание мицелия исследуется в рамках модели Чантера–Торнли, представляющую собой систему дифференциальных уравнений. Как правило, анализ сводится к исследованию решений задачи Коши [1, 2]. Мы посмотрели на процесс выращивания мицелия с точки зрения смены стационарных равновесных состояний, которые имеются в модели Чантера–Торнли. Результат был анонсирован в [3].

1. Модель Чантера-Торнли

В 1978 году Чантер и Торнли [1], изучая рост мицелия (грибницы) в компосте (ёмкость фиксированного и постоянного объёма V_c, в которой осуществляется выращивание грибов на питательном субстрате с образованием спорофор), построили математическую модель роста грибов.

Поскольку определение сухой массы мицелия является наиболее употребительной мерой роста, то динамика мицелия описана Чантером и Торнли с помощью дифференциального уравнения, в которое мы внесли незначительное изменение:

$$\frac{dw_m}{dt} = qs_m(t)\left[1 - \frac{w_m - w_m^0}{A_m}\right](w_m - w_m^0), \tag{1}$$

где w_m – сухой вес мицелия в компосте, $w_m^0 > 0$ – исходное количество (маточного) мицелия при $t = 0$, $q > 0$ – коэффициент пропорциональности, $s_m > 0$ – концентрация субстрата в мицелии (вычисляемый как отношение соответствующих абсолютных содержаний к физическому объёму компартментов).

Величина A_m рассматривалась Чантером и Торнли как максимально достижимая величина для сухого веса мицелия. Естественно предположить, что она зависит от условий, в которых произрастает мицелий. Они предполагали, что A_m разумно рассматривать как эффект физического ограничения, обеспеченного деревянным подносом, содержащим компост и мицелий [1].

Непрерывная динамика роста мицелия во времени (см. рис. 1) была получена посредством решения диффереациального уравнения (1) и представлена в работах [1,2].

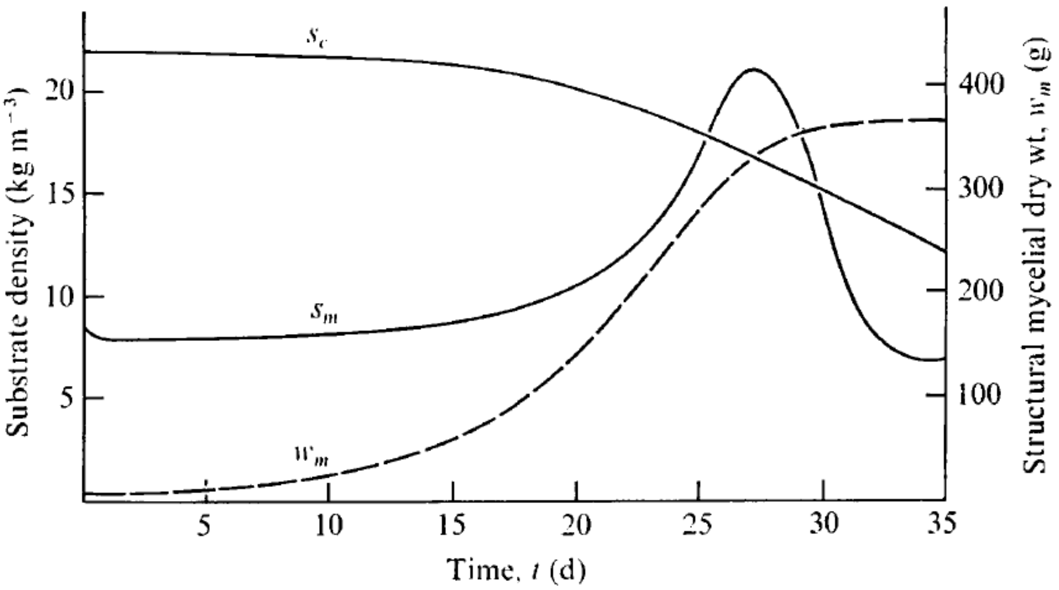

Рис. 1. Динамика изменения сухой массы мицелия w_m, плотности субстрата s_m в мицелии и плотности субстрата s_c в компосте [1]. Здесь $w_m^0 = 0$

2. Стационароные равновесия

Рассмотрим модель Чантера–Торнли с точки зрения математической теории бифуркаций [4].

Как принято в теории бифуркаций, для уравнения (1) следует искать стационарные равновесные решения, удовлетворяющие условию:

$$\frac{dw_m}{dt} = 0. \tag{2}$$

Из этого уравнения находим две кривые $w = w(A)$ равновесия на плоскости (A_m, w_m):

$$w_m = w_m^0 \quad \text{и} \quad w_m = w_m^0 + A_m. \tag{3}$$

Находясь в стационарном равновесии, величина сухой массы мицелия w_m не меняется с течением времени.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dw}{dt} = f(w, A), \tag{4}$$

$$f(w,A) = qs_m(t)\frac{A-(w-w_m^0)}{A}(w-w_m^0).$$

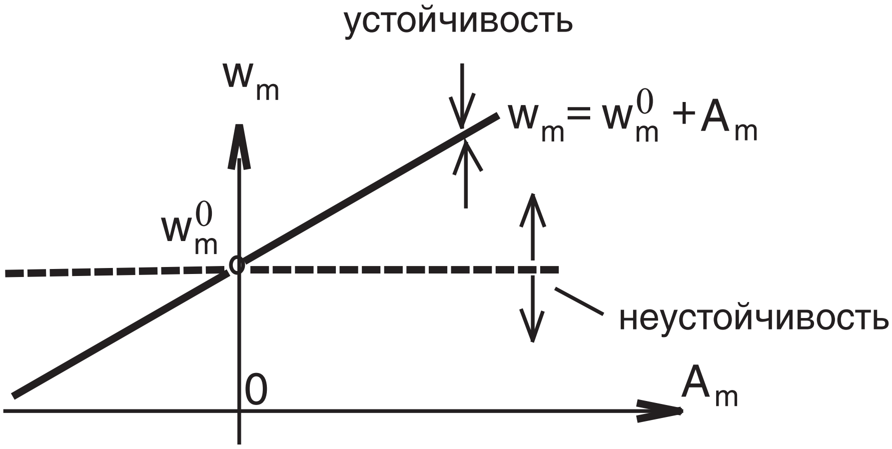

Рис. 2. Две ветви равновесий для уравнения (1). Пунктирная линия – неустойчивые равновесия; сплошная линия – устойчивые равновесия

Устойчивость равновесий. Для того чтобы установить устойчивость равновесий, используем теорему из § 11.7 книги [4, с. 24].

Имеем, раскладывая правую часть уравнения (4) в ряд Тейлора в «точке» равновесия $(w(A), A_m)$,

$$\frac{dw}{dt} = \underbrace{f(w(A),A)}_{=0} + f'_w(w(A),A)(w-w(A)) + ...$$

$$= f'_w(w(A),A)(w-w(A)) + ...$$

Если

$$\sigma = f'_w(w(A),A) = qs_m\frac{A-2(w-w_m^0)}{A} < 0,$$

то равновесие $w(A)$ устойчиво, и неустойчиво $\sigma > 0$.

Для равновесий $w_m = w_m^0$

$$\sigma = f'_w(w_m^0, A) = qs_m \cdot 1 > 0.$$

Следовательно, равновесия с кривой равновесий $w(A) = w_m^0$ неустойчивы для $A_m > 0$ (рис. 2).

Для равновесия $w_m(A) = w_m^0 + A_m$

$$\sigma = f'_w(w_m(A), A_m) = qs_m\frac{A_m - 2(w_m - w_m^0)}{A_m} = qs_m\frac{A_m - 2A_m}{A_m} = -qs_m < 0.$$

Поэтому равновесия, лежащие на кривой равновесий $w_m = w_m^0 + A_m$, устойчивы при $A_m > 0$ (рис. 2).

3. Выводы

Таким образом, мицелий, имея начальный вес w_m^0, находится в неустойчивом равновесном состоянии с $A_m > 0$. Неизбежные малые спонтанные возмущения или действия персонала в системе «компост-субтрат-мицелий-спорофоры» приведут к скачку в устойчивое равновесие $w_m = w_m^0 + A_m$. Иначе говоря, долго состояние $w_m = w_m^0$ существовать не может, поскольку внешние условия подталкивают мицелий к росту.

При изменении значения параметра A_m система поменяет равновесие, причём либо останется на устойчивой ветви $w_m = w_m^0 + A_m$, либо соскочит на неустойчивую ветвь $w_m = w_m^0$ и оттуда вновь неизбежно перескочит на устойчивую ветвь. Эти скачкообразные перемещения сопровождаются как ростом сухого веса мицелия, так и, возможно, его уменьшением. Уменьшение веса связано с уменьшением A_m.

Более того, непредсказуемые случайные воздействия окружающей среды на растущий мецелий могут приводить к тому, что его сухой вес не является непрерывно меняющейся величиной, а есть величина, меняющаяся скачкообразно от одного постоянного значения, отвечающего стационарному равновесию, к другому такому же равновесию, но с иным весом. И это мы связали с изменениями параметра A_m.

Однако может ли параметр A_m меняться при выращивании мицелия? Чантер и Торнли высказывались о величине A_m как эффекте деревянного подноса, содержащего компост и мицелий. Но следует вспомнить и о необходимости снижать температуру в компосте, заинокулированном грибницей, в начале процесса выращивания мицелия, и о мероприятиях по предотвращению пересыхания компоста, об уплотнении компоста и т. д. В какой-то мере это означает наличие колебаний значений величины A_m.

Литература

1. Chanter D.O., Thornley J.H.M. Mycelial Growth and the Initiation and Growth of Sporophores in the Mushroom Crop: a Mathematical Model // Journal of General Microbiology. 1978. V. 106. P. 55–65.
2. Вигонт В.А., Миронычева Е.С., Топаж А.Г. Модификация модели роста грибов Чантера–Торнли и её анализ средствами многоподходного имитационного моделирования // Компьютерные исследования и моделирования. 2015. Т. 7, № 2. С. 375––385.
3. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Скачкообразный рост мицелия в модели Чантера-Торнли роста грибов // Омские научные чтения – 2019 [Электронный ресурс]: материалы Третьей Всероссийской научно-практической конференции (Омск, 2–5 декабря 2019 г.). Электрон. текстовые дан. Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2017. Всероссийская научно-практическая конференция (Омск, 2-6 декабря 2019 г.). Омск : ОмГУ, 2019. С. 129–130.
4. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М. : Мир, 1983. 301 с.

MYCELIAL GROWTH ANALYSIS BASED ON THE CHANTER-THORNLEY MODEL

L.A. Volodchenkova
Ph.D. (Biology), Asoo professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The Chanter-Thornley mycelial growth model is analyzed with point of view of the mathematical bifurcation theory. It was shown that one can observe not only the continuous growth of the mycelium, but also its saltatory evolution.

Keywords: mycelium, Chanter-Thornley model, saltatory growth, bifurcation theory.

References

1. Chanter D.O. and Thornley J.H.M. Mycelial Growth and the Initiation and Growth of Sporophores in the Mushroom Crop: a Mathematical Model. Journal of General Microbiology, 1978, vol. 106, pp. 55–65.
2. Vigont V.A., Mironicheva E.S., and Topazh A.G. Modifikaciya modeli rosta gribov Chantera-Tornli i ee analiz sredstvami mnogopodhodnogo imitacionnogo modelirovaniya. Kompyuternie issledovaniya i modelirovaniya, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 375–385. (in Russian)
3. Volodchenkova L.A. and Guts A.K. Skachkoobrazniy rost miceliya v modeli Chantera-Tornli rosta gribov. Omskiye nauchnie chteniya – 2019 [Elektronik resurs]: materiali Tret'ey Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferencii (Omsk, 2–5 dekabrya 2019 g.), Omsk, Izd-vo Om. gos. un-ta, 2019, pp. 129–130. (in Russian)
4. Yoss Zh. and Dzhozef D. Elementarnaya teoriya ustoychivosti i bifurkaciy. Moscow, Mir publ., 1983, 301 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 30.03.2020