А. К. Гуц, К основаниям геометрии пространства-времени, *Докл. АН СССР*, 1980, том 253, номер 2, 268–271

УДК 513.82 МАТЕМАТИКА

А.К. ГУЦ

К ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 23 II 1980)

Мы рассматриваем аффинное n-мерное пространство A^n, $n \geqslant 2$, в котором задан инвариантный относительно всех параллельных переносов несвязный порядок.

Геометрически введение порядка в A^n состоит в том, что каждой точке $x \in A^n$ ставится в соответствие множество $P_x \subset A^n$ с условиями:

1) $x \in P_x$;

2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$;

3) при $x \neq y$ имеем $P_x \neq P_y$. Тогда, записывая отношение $y \in P_x$ как $x \leqslant y$, получаем порядок (частичный) в A^n.

Инвариантность порядка относительно параллельных переносов понимается следующим образом. Если t – параллельный перенос, и $t(P_x)$ обозначает образ множества P_x при переносе t, то для любой точки $x \in A^n$ и любого переноса t имеет место равенство $t(P_x) = P_{t(x)}$.

Таким образом, задание инвариантного порядка определяется заданием некоторого множества P_e, отнесенного к фиксированной точке e.

Порядок P_e называется несвязным, если множество P_e не является связным; в противном случае порядок считается связным.

В этой заметке мы излагаем результаты, полученные при изучении биективных отображений A^n на себя, сохраняющих заданный в A^n несвязный порядок. При этом мы говорим, что биекция f: $A^n \to A^n$ сохраняет порядок P_e, или является P-изотонной, если она удовлетворяет следующему условию: $f(P_x) = P_{f(x)}$ для любой точки $x \in A^n$. Нетрудно проверить, что P-изотонность эквивалентна монотонности отображений f и f^{-1}, т.е. из отношения $x \leqslant y$ следует $f(x) \leqslant f(y)$ и $f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}(y)$.

1. Мы фиксируем точку e на протяжении всей статьи и будем писать $\mathcal{P}$ вместо P_e. Если M – какое-либо множество в A^n, содержащее точку e, то M_x обозначает множество, полученное из M с помощью переноса t такого, что $t(e) = x$. Через $\operatorname{int} A$, $\bar{A}$, ∂A обозначаем соответственно внутренность, замыкание и границу множества A. Далее $L(x, y)$ означает луч с началом в точке x, проходящий через точку y, $x \neq y$; $x \in L(x, y)$.

Определение 1. Смещением $d_{E\mathrm{l}}$ (или d_{EL}), где E – некоторая гиперплоскость, а l – вектор (соответственно луч L), не параллельный E, называется гомеоморфизм A^n на себя, удовлетворяющий условиям:

(a) на каждой гиперплоскости E_a, параллельной E, $d_{E\mathrm{l}}$ (соответственно d_{EL}) есть перенос;

(b) $d_{E\mathrm{l}}$ (или d_{EL}) переводит отрезки (лучи), равные и параллельные l (соответственно L), в такие же отрезки (лучи).

Определение 2. Квазицилиндром $Q(E, l)$ называется множество M, удовлетворяющее следующим условиям ([1]):

(a) имеются гиперплоскости $E_1, E_2, \ldots$, параллельные E, где E_{i+1} получено из E_i переносом на вектор l, а множество M представляется в виде

$$(1)\qquad M = \bigcup_i [M_i \cup (M \cap E_i)],$$

где каждое M_i есть цилиндр, образованный открытыми отрезками, равными l (как векторы), с концами на E_i, E_{i+1} (не исключается, что некоторые и даже все M_i пусты);

(b) M не допускает представления (1) с той же гиперплоскостью E и вектором l' параллельным l, но не равным l.

Наглядно квазицилиндр состоит из поставленных друг на друга цилиндров с равными и параллельными образующими; основания цилиндров удалены, и между цилиндрами есть прокладки на гиперплоскостях E_i.

Квазицилиндр можно охарактеризовать как множество M, для которого существуют гиперплоскость E, вектор l и перенос t такие, что $d_{E\mathrm{l}}(M) = t(M)$ (([1]), стр. 15).

Определение квазицилиндра $Q(E, L)$, где L – луч, дается аналогично.

2. Несвязный порядок P, изучаемый нами, удовлетворяет следующим условиям:

(А) $P = \{e\} \cup Q$, где Q – замкнутое связное множество с внутренними точками, не содержащее точку e;

(Б) P лежит внутри некоторого выпуклого конуса с острой вершиной e (острая вершина – значит, конус не содержит никакой прямой).

Конус

$$(2) \qquad C = \overline{\bigcup_{x \in \operatorname{int} Q} L(e, x)}$$

с вершиной e называется внешним конусом.

Определение 3. Порядок P называется линейчатым, если существует луч $L(e, x_0) \subset C$, где C – внешний конус (2), такой, что для любой прямой λ, параллельной лучу $L(e, x_0)$, множество $\lambda \cap Q$ либо пусто, либо обязательно является лучом.

Определение 4. Порядок P называется m-линейчатым, где $m = 1, 2, \ldots$ – натуральное число, если P является линейчатым по отношению к лучам $L_1(e, x_1), \ldots, L_m(e, x_m)$, не лежащим в одной $(m-1)$-мерной плоскости.

Порядок P, не являющийся линейчатым, называется нелинейчатым.

Теорема 1. *Пусть P – несвязный n-линейчатый порядок в A^n, $n \geqslant 2$, удовлетворяющий условиям* (А) *и* (Б).

Тогда либо любая P-изотонная биекция $f\colon A^n \to A^n$ является аффинным преобразованием, либо P – квазицилиндр и f имеет вид

$$(3) \qquad f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p,$$

где f_0 – аффинное преобразование, а d_i есть $d_{E_i \mathrm{l}_i}$ или $d_{E_i L_i}$, причем порядок, в котором в формуле (3) *стоят d_i, несуществен.*

Теорема 2. *Пусть P – несвязный нелинейчатый порядок в A^n, $n \geqslant 2$, удовлетворяющий условиям* (А) *и* (Б).

Тогда существует связный порядок, задаваемый m-мерным конусом K, $K \subset C$, $m \geqslant 1$, с вершиной e, и такой, что любая P-изотонная биекция является K-изотонной.

Следствие 1. *Существует линейчатый порядок $\tilde{P} = \{e\} \cup \tilde{Q}$ такой, что:*

1) *$Q \subset \tilde{Q}$ и для $\tilde{P}$ справедливы условия* (А) *и* (Б);

2) *любая P-изотонная биекция является $\tilde{P}$-изотонной.*

Таким образом, можно изучать только линейчатые порядки. Заметим, что ни в теореме 2, ни в следствии не утверждается n-линейчатость порядка, а лишь его линейчатость.

Понятие линейчатого порядка не является искусственным, техническим, а имеет под собой весьма глубокое основание. Как следует из приводимой ниже теоремы 3, линейчатость – следствие однородности границы ∂Q порядка P.

Обозначим через G_a множество всех P-изотонных биекций таких, что $g(a) = a$ для любой $g \in G_a$. Тогда имеем условие $G1$. Группа G_a действует транзитивно на ∂Q_a, т.е. для любых $x, y \in \partial Q_a$ существует $g \in G_a$ такая, что $g(x) = y$.

Теорема 3. *Любой несвязный порядок P в A^n, $n \geq 2$, удовлетворяющий условиям* (А), (Б) *и* G1, *является, по крайней мере,* 1-*линейчатым.*

3. Введем следующее условие

G2. Не существует m-мерной плоскости, $1 \leq m < n$, проходящей через точку e, которая отображается на себя при любом изотонном отображении $g \in G_e$.

Теорема 4. *Пусть P – несвязный порядок в A^n, $n \geq 2$, удовлетворяющий условиям* (А), (Б), G2.

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть $P = \{e\} \cup Q$ – несвязный порядок в A^n, $n \geq 2$, удовлетворяющий условиям* (А), (Б) *и* G2.

Тогда P задает порядок с условием G1 *тогда и только тогда, когда Q – множество, выделяемое из некоего конуса K с аффинной группой, транзитивной внутри него, плоскостями, отсекающими от K постоянный объем. При этом группа G_e является унимодулярной подгруппой этой аффинной группы. Условие* G2 *можно заменить требованием n-линейчатости порядка P.*

Эта теорема вытекает из теоремы 1 и теоремы 5 А.Д. Александрова из работы ([2]).

Нетрудно видеть, что $K = C$, т.е. K совпадает с внешним конусом.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.

Тогда в четырехмерном пространстве A^4 внешний конус есть либо эллиптический конус (и G_e – группа Лоренца), либо четырехгранный угол, либо декартово произведение луча на трехмерный эллиптический конус.

Приведенное утверждение получается из теоремы 5 и теоремы 8 из ([3]).

4. Нижеследующие утверждения показывают, что требование связности множества Q, а также наличия внутренних точек в Q можно опустить.

Предложение 1. *Пусть P – линейчатый по отношению к лучу L порядок, удовлетворяющий условиям* (А) *и* (Б), *за исключением требования связности Q.*

Тогда существует порядок $\tilde{P}$ такой, что

1) *$\tilde{P}$ линейчатый по отношению к лучу L;*

2) *$\tilde{P}$ удовлетворяет условиям* (А) *и* (Б);

3) *любая P-изотонная биекция является $\tilde{P}$-изотонной.*

Предложение 2. *Пусть P – несвязный порядок, удовлетворяющий условиям* (Б) *и* G1. *Предположим, что $e \,\overline{\in}\, \overline{Q}$.*

Тогда Q имеет внутренние точки.

5. Сформулируем теперь результат, имеющий важное значение для оснований специальной теории относительности.

Теорема 6. *Пусть P – несвязный порядок в A^4, удовлетворяющий условиям* (А), (Б), G1 *и* G2. *Предположим, что внешний конус C не является квазицилиндром или четырехгранным углом. Тогда*:

1) *C – замкнутый эллиптический конус;*

2) *G_e есть однородная группа Лоренца;*

3) *существует декартова система координат x_0, x_1, x_2, x_3, в которой ∂Q задается отношениями $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = m^2$, $x_0 > 0$, где $m = \text{const} \neq 0$, а конус ∂C – отношениями $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$, $x_0 \geq 0$.*

Условие G2 *можно заменить требованием* 4-*линейчатости порядка P.*

6. Физическая интерпретация. Аффинное пространство A^4 рассматриваем как пространство событий, или, что то же, пространство-время, с каждой точкой которого связано какое-либо событие; соответственно x, y обозначают точки – события. Отношение $x \leq y$ говорит о том, что x воздействует на y, т.е. от x к y передается энергия-импульс. Условие (Б) представляет собой ограничение на скорость передачи воздействия. В таком случае условие (А) говорит, что воздействие

передается скачком, минуя события, лежащие в достаточно малой пространственно-временной области. Требование изотропности и однородности пространства заключается в условиях G1 и G2.

Теорема 6 представляет собой систему аксиом, определяющих геометрию пространства Минковского. Мы можем поэтому сделать важное заключение. Для того чтобы установить псевдоевклидовость геометрии пространства-времени, совсем не обязательно предполагать наличие причинно-следственных связей в области микроявлений. Таким образом, группа Лоренца – следствие причинных связей макромира, а структура микромира, в определенной мере, – лишь порождение этой фундаментальной симметрии пространства-времени.

Омский государственный университет

Поступило
12 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А.Д. Александров*, Тр. МИАН, т. 128, 3 (1972). [2] *А.Д. Александров*, ДАН, т. 219, № 2, 265 (1974). [3] *А.Д. Александров*, ДАН, т. 189, № 4, 695 (1969).

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

В.А. ДМИТРОВСКИЙ

УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ И ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 12 III 1980)

1. Пусть T – некоторое множество, $\xi(t)$ – случайное поле на нем. Пусть нам известны функции распределения абсолютных величин значений поля и его приращений:

$$F_t(u) = P\{|\xi(t)| \geqslant u\}, \quad G_{t,s}(u) = P\{|\xi(t) - \xi(s)| \geqslant u\}.$$

В работе даются достаточные условия для ограниченности поля $\xi(t)$ на T с вероятностью 1 и его непрерывности в некоторой естественной для него топологии на множестве T. Приводится оценка распределения равномерной нормы поля $\|\xi\| = \sup\{|\xi(t)| \mid t \in T\}$. Кроме того, для гауссовских полей дается более точная оценка, которая в известных частных случаях (рассмотренных, например, в ([1])) асимптотически совпадает с точностью до постоянного множителя с функцией распределения нормы. Показывается, что для гауссовских полей приведенное достаточное условие ограниченности совпадает с известным условием Дадли–Ферника ([2]), т.е. является также и необходимым для однородных гауссовских полей на компактах в $\mathbf{R}^n$ ([3]).

Таким образом, несмотря на общность решаемой задачи, удается получить результаты, которые в некоторых частных случаях практически неулучшаемы.

2. Введем функции

$$F(u) = \sup\{F_t(u) \mid t \in T\}, \quad G(u) = \sup\{G_{t,s}(u) \mid t \in T,\ s \in T\},$$

$$f(x) = \sup\{u \mid F(u) \geqslant x\}, \quad g(x) = \sup\{u \mid G(u) \geqslant x\},$$

$$\rho(t, s) = \sup\{u[g(G_{t,s}(u))]^{-1} \mid u > 0\}.$$