Математические структуры и моделирование
2023. № 4 (68). С. 52–58

УДК 550.34:517.977.8
DOI 10.24147/2222-8772.2023.4.52-58

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР К ОПИСАНИЮ ТЕКТОНИЧЕСКИХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

А.К. Гуц
доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, e-mail: aguts@mail.ru

Федеральный исследовательский центр «Субтропический научный центр Российской академии наук», Сочи, Россия

Аннотация. Применяется теория дифференциальных игр для анализа сдвигового разломного землетрясения. Найдено оптимальное равновесное управление Нэша, описывающее затухание толчков.

Ключевые слова: сдвиговый разлом, землетрясения, дифференциальные игры, стратегии Нэша.

Введение

Землетрясения являются крайне опасным природным явлением, которое приносит много бед людям и экономике. Если сконцентрировать внимание на тектонических землетрясениях, то первое к чему обращается исследователь, пытающийся понять природу этих землетрясений, это существующие теории их объясняющие. Выясняется удивительная ситуация, когда авторы учебников и монографий по тектоническим землетрясениям говорят о том, что многое, касающееся структуры как земной поверхности, так и ее недр, неизвестно, предположительно или представляет набор гипотез.

Тем не менее считается, что земная поверхность, её кора, т. е. наружная твёрдая оболочка земного шара, состоит из множества каменных *блоков* (плит) определённой *породы*, которые движутся, упруго сталкиваются, трутся друг о друга, что порождает *сейсмические волны*, бегущие вдоль блоков. Преодоление блоком препятствия в виде другого блока есть преодоление, борьба с *силами трения*, что первоначально приводит к деформациям, к накоплению упругой энергии, а преодоление препятствия ведет к ее разрядке, разрушению пород, порождая толчки, ощущаемые людьми как дрожание земной поверхности, к толчкам, влекущим разрушение зданий.

Землетрясение происходит, как сказано, когда два блока внезапно скользят один по другому. Поверхность, по которой они скользят, называется *разломом* или *плоскостью разлома* [1]. Лишь немногие тектонические разломы выглядят как щелевидные полости. В большинстве случаев эти полости заполнены или обвалившимися в них обломками окружающих пород, или минеральными зернами, выкристаллизовавшимися из просочившихся по разломам (разрывам) подземных вод, или закристаллизовавшимися магматическими расплавами. Поэтому часто разлом (разрыв) предстаёт перед нами в виде пластинообразного тела, которое отличается от окружающей среды (породы) меньшей или большей прочностью, а также другими физическими свойствами. На местности одни разломы проявляются в виде цепочек озёр, долин и иных понижений рельефа. Другие разломы (разрывы), наоборот, выглядят гребнями в рельефе. Немало разломов, даже крупных, которые практически не выражены в рельефе и обнаруживаются только при сопоставлении многочисленных обнажений горных пород или проходке горных выработок [2, с. 126].

Наука стремится описать землетрясения, привлекая для этого достаточно разработанные и проверенные научные теории, составляющие такие *математизированные* направления, как механика и физика. Механика и физика занимают достойные места в науке о землетрясениях.

Но вполне естественно, описывая землетрясения, обратиться и к чисто математическим теориям. Одной из первых здесь была использована теория катастроф (см. обзор: [3]). Землетрясения в этой теории выглядят как *скачкообразные изменения состояний* (например, смещения берегов разлома) равновесия под воздействием тех или иных управляющих параметров (силами трения, энергией сдвигов пород и пр.). В принципе, это отражает то представление о ходе землетрясения, которое описано выше.

С другой стороны, землетрясение – это «борьба» различных сил, представляемых в теории как управляющие параметры, изменение которых либо ведёт к главному толчку, либо толчки спадают на нет, затихают. Такой взгляд на землетрясение наводит на мысль описать изменения управляющих параметров как в неком роде противостояние различных подземных сил, или, как будет лучше выразиться, как *игру* разных сторон, участвующих в столкновении блоков.

Иначе говоря, в данной статье мы попытаемся описать землетрясение с помощью дифференциальной теории игр, основой которой являются дифференциальные уравнения с переменными, описывающими как состояние системы, так и управление ею [4].

1. Дифференциальное уравнение игры

В статье [5] китайские специалисты предложили следующую математико-механическую модель сдвигового разлома (strike-slip fault).

Рассмотрим горизонтальное простирание разлома и однородную окружающую породу (rock), воспринимаемые как механическая система, что показано на рис. 1. Расстояние от границы дальнего поля до края зоны разлома равно B, а ширина зоны разлома равна $2b$.

Пусть смещение дальнего поля равно u_∞, смещение разлома – u_f и смещение окружающей породы – u_s:

$$u_\infty = u_f + u_s. \tag{1}$$

Полагаем, что окружающая порода является изотропной упругой средой, которая удовлетворяет закону Гука:

$$\tau_s = G_s \gamma_s, \tag{2}$$

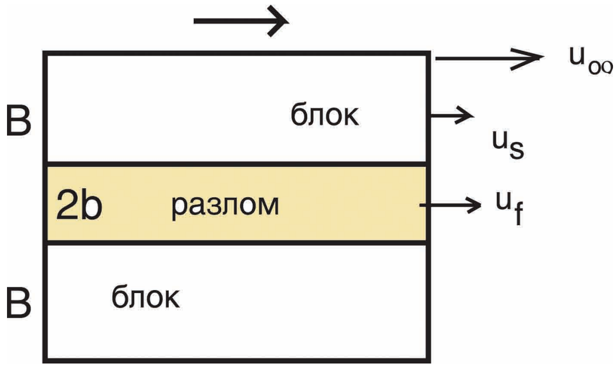

Рис. 1. Модель сдвигового разлома

где τ_s – напряжение сдвига окружающей породы; G_s – жёсткость породы при сдвиге; γ_s – деформация породы при сдвиге. Для удобства представим его через R_s – усилия сдвига и сдвигового перемещения u_s:

$$R_s = K_s u_s, \tag{3}$$

где $K_s = G_s A/B$, A – площадь поперечного сечения разлома, окружающего систему горных пород.

Основываясь на неоднородности прочности поверхности разлома, процесс макроразрушения поверхности разлома рассматривается как процесс накопления локального микроэлемента разлома. Предполагается, что локальная интенсивность разлома по микроэлементам соответствует распределению вероятности Вейбулла [6]. Соотношение напряжений и деформаций в зоне разлома принимается в виде отрицательной экспоненциальной формы [7]:

$$\tau_f = G_f \gamma_f e^{-(\frac{\gamma_f}{\gamma_0})^m}. \tag{4}$$

В уравнении (4) τ_f – напряжение сдвига; G_f – начальная жёсткость (разлома) при сдвиге; γ_f – деформация при сдвиге. Сдвиговое смещение u_f зоны разлома и деформация γ_f удовлетворяют геометрическому уравнению:

$$\gamma_f = \frac{u_f}{b}. \tag{5}$$

Полагая, что $K_f = G_f A/b$, соотношение между сдвигающей силой и сдвиговым смещением зоны разлома перепишем как

$$R_f = K_f u_f e^{-(\frac{u_f}{u_0})^m}, \tag{6}$$

где u_0 – постоянная величина; m – параметр формы, который связан с механическими свойствами среды разлома.

Для удобства пишем $u_f = u$.

Независимо от влияния силы тяжести общая потенциальная энергия системы горных пород, окружающих разлом, равна

$$V = \int\limits_{u}^{u_\infty} R_s du_s + \int\limits_{0}^{u} R_f du = \int\limits_{u}^{u_\infty} K_s u_s du_s + \int\limits_{0}^{u} K_f u e^{-(\frac{u}{u_0})^m} du. \tag{7}$$

Из (7) получаем уравнение поверхности равновесия

$$V' = K_f u e^{-(\frac{u}{u_0})^m} + K_s(u_\infty - u) = 0. \tag{8}$$

После некоторых преобразований (см. [5]) уравнения (8), разложения его в ряд Тейлора по u в точке $u = u^* = (\frac{m+1}{m})^{1/m}$ и пренебрежения членами разложения выше третьего получаем уравнение

$$\left(\frac{u-u^*}{u}\right)^3 + \frac{6}{m\cdot(m+1)^2}\cdot\left(\frac{K_s}{K_f\cdot e^{-\frac{m+1}{m}}} - m\right)\left(\frac{u-u^*}{u^*}\right)+$$

$$+\frac{6}{m\cdot(m+1)^2}\cdot\left(1 - \frac{K_s}{K_f\cdot e^{-\frac{m+1}{m}}}\left(\frac{u_\infty - u^*}{u^*}\right)\right) = 0. \tag{9}$$

Пусть

$$K = \frac{K_s}{K_f m e^{-\frac{m+1}{m}}} = \frac{G_s b}{G_f B} = \frac{G_s b}{G_f B} = \frac{\text{(жесткость породы при сдвиге в блоке)}}{\text{(начальная жесткость в разломе)}}\cdot\frac{b}{B}, \tag{10}$$

$$\xi = \frac{u_\infty - u^*}{u^*} - \text{смещение в дальнем поле минус } u^*, \tag{11}$$

$$x = \frac{u-u^*}{u^*} = \frac{u_f - u^*}{u^*} - \text{безразмерное смещение в разломе,} \tag{12}$$

$$p = \frac{6}{(m+1)^2}\cdot(K-1) - \text{отношение жесткостей в блоке и в разломе,} \tag{13}$$

$$q = \frac{6}{(m+1)^2}\cdot\left(\frac{1}{m} - K\xi\right) - \text{отношение жесткостей в блоке и в разломе, (смещение } \xi). \tag{14}$$

Тогда уравнение (8) запишется в виде

$$x^3 + px + q = 0. \tag{15}$$

А это, как мы знаем, есть уравнение поверхности равновесия для катастрофы «сборка» с потенциальной функцией

$$V = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}px^2 + qx.$$

Таком образом, сдвиговый разлом, а значит, и сдвиговое землетрясение может описываться катастрофой «сборка». Смысл переменных x, p, q дан в формулах (11), (12), (13), (14),

В силу сказанного динамика сдвигового разлома описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -x^3 - px - q. \tag{16}$$

2. Дифференциальные игры

Мы можем рассматривать игру двух игроков, обозначаемых p и q, которые в рамках теории катастроф рассматриваются как управляющие параметры. Из смысла этих параметров мы видим, что они достаточно независимы и в какой-то мере могут рассматриваться то как конкурирующие, то как находящиеся в компромиссном состоянии. Их игра определяет будущее движение окружающих разлом пород.

Игру рассматриваем с ненулевой суммой, поскольку трудно сказать в нашем случае, что выигрыш одного игрока – это проигрыш другого.

Будем использовать теорию дифференциальных игр с позиционным управлением (p, q), т. е. изменение значений p и q определяется состоянием x сдвигового смещения в разломе в данный момент.

Будем искать позиционное управление Нэша. Используемая теория (см.: [4]) кратко может быть представлена следующим образом.

Наше уравнение (16) запишем как

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2, \quad f(0) = 0,$$

$$x \in \mathbb{R}, \ \ u_j \in \mathbb{R},$$

где каждое u_j – это j-й игрок, его управляющий параметр с выигрышными функциями

$$J_1(x, H, r) = \int\limits_0^{+\infty} [Q_1(x) + p^2]dt, \quad J_2(x, H, r) = \int\limits_0^{+\infty} [Q_2(x) + q^2]dt,$$

где $Q_1(x), Q_2(x)$ – положительно определённые функции.

Существование управления Нэша означает выполнение неравенств:

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, ..., u_N^*) \leqslant J_i(u_1^*, u_2^*, ..., u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^* ..., u_N^*), \ \ \forall u_i, \ \ i = 1, 2. \tag{17}$$

Задача отыскания управления Нэша сводится к крайне сложной задаче отыскания положительно определённого решения $V_i(x) > 0$ нелинейного уравнения Гамильтона – Якоби [4]:

$$(V_i)'_x(x)f(x) + Q_i(x) - \frac{1}{2}(V_i)'_x \sum_{j=1}^{2} [g_j(x)]^2 (V_j)'_x +$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{2} [g_j(x)]^2 [(V_j)'_x]^2 = 0, \ \ (i = 1, 2), \tag{18}$$

по которому строится управление Нэша:

$$u_i^*(x) = u_i(V_i(x)) = -\frac{1}{2} g_i(x)(V_i)'_x, \ \ i = 1, 2 \tag{19}$$

в соответствии с теоремой 10.4-2 из [4].

3. Игра «Сдвиговый разлом»

Итак, дифференциальная игра описывается уравнением (16), игрок 1 – параметр $u_1 = p$ – «Состав пород», игрок 2 – параметр $u_2 = q$ – «Смешение в дали» и

$$f(x) = -x^3,\ \ g_1(x) = -x,\ \ g_2(x) = -1.$$

Тогда уравнения Гамильтона – Якоби принимают вид:

$$\begin{aligned} &Q_1 + (V_1)'_x f(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2[(V_1)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_2(x)]^2(V_1)'_x(V_2)'_x = 0,\\ &Q_2 + (V_2)'_x f(x) - \frac{1}{4}[g_2(x)]^2[(V_2)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_1(x)]^2(V_1)'_x(V_2)'_x = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Следовательно, если взять

$$Q_1 = x^4 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2, \quad Q_2 = x^4 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^4, \tag{21}$$

то уравнения Гамильтона-Якоби имеют решения:

$$V_1(x) = V_2(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

При этом функции $Q_1(x), Q_2(x)$ являются положительно определёнными.

Поэтому по теореме 10.4-2 из [4] имеем управление Нэша

$$p^* = \frac{1}{2}x^2, \quad q^* = \frac{1}{2}x, \tag{22}$$

найденное по формулам (19). Уравнение дифференциальной игры принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x < 0. \tag{23}$$

Находим решение для (23):

$$-\frac{2}{3}t + \ln C = \int \frac{dx}{x^3 + (1/3)x} = \int \frac{dx}{x(x^2 + (1/3))} = \frac{1}{(2/3)} \ln \frac{x^2}{(1/3) + x^2},$$

или

$$\frac{x^2}{(1/3) + x^2} = C \cdot e^{-(4/9)t}.$$

Переходя к пределу по $t \to +\infty$, получим, что $\lim\limits_{t \to +\infty} x^2 = 0$. Это говорит о том, что с течением времени смещение в разломе сойдёт на нет, т. е. толчки прекратятся, землетрясение закончится.

4. Заключение

Предпринятую попытку описать землетрясение как дифференциальную игру не следует рассматривать как успешную. Это было бы опрометчиво. Землетрясение – крайне сложное явление, и трудно надеяться, что само исходное для нас уравнение (16) адекватно отражает сдвиговый разлом. Но сведение динамики землетрясений к дифференциальным уравнениям, к дифференциальным играм уже имеет смысл, поскольку это означает привлечение нового и мощного математического аппарата для изучения опасного природного явления.

5. Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № госрегистрации 122032300363-3).

Литература

1. Wald L. The Science of Earthquakes By Earthquake Hazards Program. URL: `https://www.usgs.gov/programs/earthquake-hazards/science-earthquakes` (дата обращения 08.11.2023).
2. Гзовский М.В. Основы тектонофизики. М. : Наука, 1975. 536 с.
3. Гуц А.К. Тектонические землетрясения и теория катастроф // Математические структуры и модлирование. 2023. № 4 (68). С. 21–49.
4. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal Control. John Wiley & Sons, Inc., 2012.
5. Chen Z., Wang W., Li D. Instability Analysis of Strike-Slip Fault Based on Cusp Catastrophe Model // SDHM. 2018. Vol. 12, No. 1. P. 19–33.
6. Li E.P., Yin Y.Q. A simply model for earthquake instability // Earthquake Research in China. 2009. Vol. 24, No. 2. P. 179–189.
7. Stuart W.D. Strain-softening instability model for the san fernando earthquake // Science. 1979. Vol. 203, No. 4383. P. 907.

APPLICATION OF DIFFERENTIAL GAMES TO THE DESCRIPTION OF TECTONIC EARTHQUAKES

A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Leading Scientist Researcher, e-mail: aguts@mail.ru

Federal Research Centre the Subtropical Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Sochi, Russia

Abstract. Differential game theory is used to analyze a shear fault earthquake. The optimal Nash equilibrium control describing the attenuation of shocks is found.

Keywords: shear fault, earthquakes, differential games, Nash strategies .

Дата поступления в редакцию: 16.11.2023