

ТЕОРЕТИКО-КАТАСТРОФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПОЛЗНЕВЫХ ПРОЦЕССОВ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник, e-mail: aguts@mail.ru

Федеральный исследовательский центр «Субтропический научный центр
Российской академии наук», Сочи, Россия

Аннотация. Обзорная статья, представляющая работы по применению математической теории катастроф к описанию оползневых процессов. Эти работы, главным образом, успешно ведутся в Китае и Индии, где разрушительные оползни представляют серьезную опасность как для экономики, так и для жизни людей.

Ключевые слова: оползни, теория катастроф, обзорная статья.

1. Введение

Данная статья является обзором работ по применению математической теории катастроф к описанию оползневых процессов, которые представляют собой опасные природные явления, приводящие к бедствиям, разрушениям и человеческим жертвам во многих регионах самых различных стран.

Оползнем называют смещение масс горных пород вниз по склону под действием силы тяжести в виде скольжения по хорошо выраженной поверхности.

Оползень до движения находится в устойчивом равновесии A . Момент потери устойчивости равновесия оползня может произойти вследствие факторов внешнего воздействия – сейсмических, техногенных сотрясений, подрезки склона, обводнения в силу ливневого дождя и т. д. Постепенные изменения в состоянии оползня приводят к изменению соотношения сил сдвига и сил сопротивления сдвигу. Если оползень теряет устойчивое равновесие под действием внешних сил, то он как бы «срывается» с места, если динамический толчок превышает запас прочности, и за небольшое время сползает под силой действия гравитации, затем останавливается и переходит в новое устойчивое равновесие B .

Переход $A \rightarrow B$ – это скачкообразное изменение в состоянии оползня, оно и описывается одной из катастроф, указанных либо в теореме Тома, либо в теории особенностей дифференцируемых отображений.

2. Катастрофы Рене Тома

Пусть состояние некоторой системы, а в нашем случае это оползень, описывается величиной $x \in \mathbb{R}^n$, которая со временем изменяется по закону

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V(x, u)}{\partial x}, \quad u \in \mathbb{R}^k. \quad (1)$$

Семейство $V(x, u)$ имеет особенность в точке $x = 0$, если

$$V(0, u) = 0, \quad d_x V(0, u) = 0.$$

Множество

$$C_V = \{(x, u) : d_x V(x, u) = 0\}$$

называется *множеством катастроф семейства* $V(x, u)$, или *множеством равновесий*, поскольку оно состоит из стационарных равновесий.

Среди стационарных равновесий есть вырожденные – это особенности, образующие *множество особенностей*:

$$\Sigma_V = \{(x, u) \in C_V : \det d_x^2 V(x, u) = 0\},$$

проекция $\pi_V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ которого на плоскость $u \in \mathbb{R}^k$ даёт **бифуркационное множество**:

$$B_V = \pi_V(\Sigma_V) = \{u \in \mathbb{R}^k : \exists x((x, u) \in \Sigma_V)\}.$$

При изменении u с пересечением множества B_V происходит смена равновесия. Это и есть катастрофа!

Справедлива

Теорема 1. Для $n \geq 1$ и $k \leq 4$ существует открытое и плотное множество структурно устойчивых гладких k -параметрических семейств $V(x, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ эквивалентных¹ вблизи любой точки одному из семи канонических семейств

$$CG(x) + F(x, u),$$

перечисленных в табл. 1. ■

Мы видим, что формулировка этой теоремы раскрывает нам понятие *типичности* роста катастрофы: они образуют открытое плотное множество в многообразии всех гладких k -параметрических семейств функций. Иначе говоря, *почти любое* гладкое k -параметрическое семейство (с точностью до эквивалентности) указано в табл. 1.

¹Под эквивалентностью понимается достижение совпадения функций за счёт преобразования координат x и параметров u .

Таблица 1. Катастрофы Тома при $k \leq 4$

Тип	n	k	$CG(x)$	$F(x, u)$
Складка	1	1	x^2	u_1x
Сборка	1	2	$\pm x^4$	$u_1x + u_2x^2$
Ласточкин хвост	1	3	x^5	$u_1x + u_2x^2 + u_3x^3$
Бабочка	1	4	$\pm x^6$	$u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4$
Гиперболическая омбилическая точка	2	3	$x^3 + y^3$	$u_1x + u_2y + u_3xy$
Параболическая омбилическая точка	2	3	$\pm(x^2y + y^4)$	$u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4y^2$
Эллиптическая омбилическая точка	2	4	$x^3 - xy^2$	$u_1x + u_2y + u_3(x^2 + y^2)$

3. Математическая модель оползня и теория катастроф

Обращение к теории катастроф можно считать оправданным, если в математическом описании оползня, сползающего со склона, появится формула, которая входит в перечень катастроф Тома [1]. Конечно, можно постулировать модель оползня, на основе одной из катастроф Тома, но в таком случае приходится как-то обосновать *типичность* ситуации, поскольку не всегда и не всё можно описать, обращаясь к катастрофам, перечисленным не только в теореме Тома, но и в описании особенностей дифференцируемых отображений, содержащихся в трудах И.В. Арнольда и его соавторов [2].

К счастью, математическая модель сползающего оползня, непосредственно приводимая заменой переменных к катастрофе «сборка» (cusp), была предложена китайскими специалистами в 2001 г. [3,4]. Насколько автору известно, до их работ никто явным образом не выявил наличие одной из катастроф Тома в математическом описании динамики оползня.

3.1. Скольжение по плоскому склону. Случай упруго-хрупкого и деформационно-упрочняющего грунтов

Теоретико-катастрофическая модель скольжение оползня по плоскому склону, впервые предложенная в [3], исследуется также в статьях [5,6]. Она рассматривала два типа грунта, сползающего по скользящей основе по плоскому склону (рис. 1).

Предполагается, что поверхность скольжения под углом β представляет собой неоднородный прослойку (intercalation = интеркаляция), а массив горных пород над ней – твёрдое тело (рис. 1). Далее H, mg (g – ускорение свободного падения) и h – вертикальная высота горного массива, вес горного массива и толщина слоя прослойки соответственно. Под действием движущей силы, обусловленной весом горного массива, наблюдается ползучее перемещение вдоль прослойки. Из-за более

высокой прочности грунта или более низкого напряжения сдвига в некоторых сегментах прослойки грунт может обладать свойствами упругости или деформационного упрочнения. Однако из-за неоднородности грунта, воздействия выветривания и размягчения водой или более высокого напряжения сдвига в других сегментах грунта может иметь место смягчение деформации после пикового напряжения. Для упрощения анализа авторы считают, что интеркаляция состоит всего из двух видов грунтов с разными механическими свойствами (рис. 1), т. е. один (грунт 1) является упруго-хрупким, а другой (грунт 2) обладает свойством смягчения деформации.

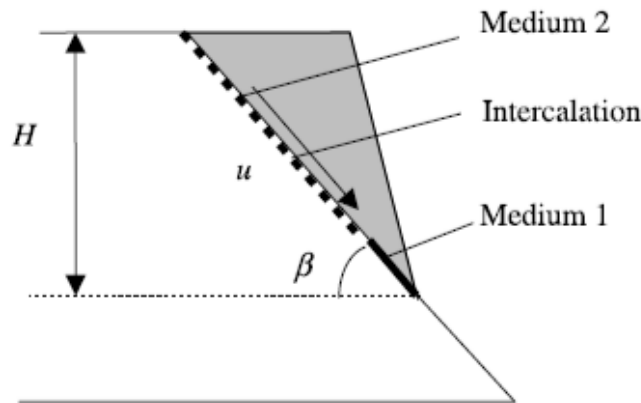


Рис. 1. Механическая модель плоского скользящего склона [3]

Пусть G_s – начальный модуль сдвига; G_e – модуль сдвига; u – ползучее смещение оползня; u_0 – величина смещения при максимальном напряжении, $u_1 = 2u_0$; l_e и l_s – длины поверхности скольжения для упруго-хрупкого грунта (грунт 1) и деформационно-упрочняющего грунта (грунт 2) соответственно, а $l_e + l_s = H / \sin \beta$; u можно рассматривать как переменную состояния, фигурирующую в описании катастрофы «сборка».

При этом предполагается, что l_e и l_s значительно больше u и (примерно) не изменяются при скольжении.

Для системы, показанной на рис. 1, общая потенциальная энергия равна сумме энергии деформации и потенциальной энергии движения, т. е.

$$V = l_s \int_0^u \frac{G_s u}{h} e^{-u/u_0} du + \frac{1}{2} \frac{G_e l_e}{h} u^2 - mgu \sin \beta.$$

Динамику оползня описываем уравнением

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial u},$$

для которого поверхность состояний равновесий (рис. 2) задаётся выражением

$$V' = \frac{G_s l_s}{h} u e^{-u/u_0} + \frac{G_e l_e}{h} u - mg \sin \beta = 0. \quad (2)$$

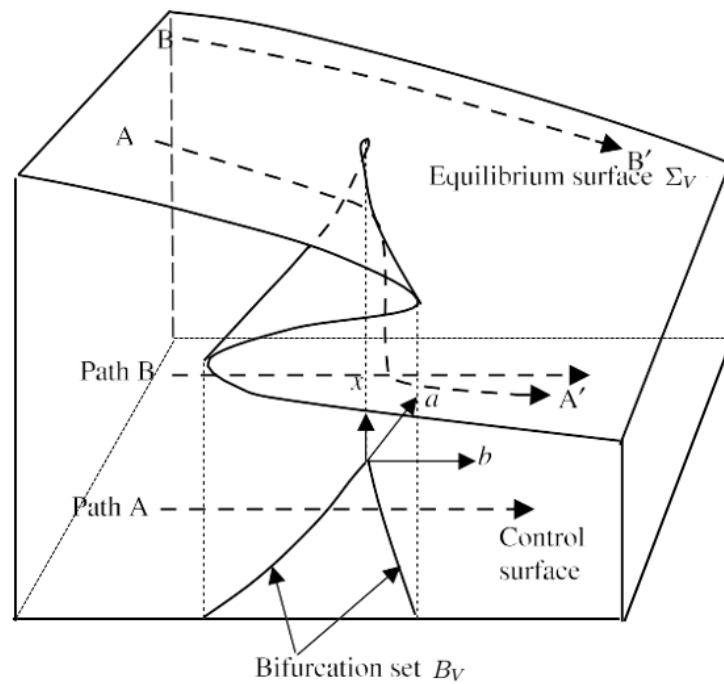


Рис. 2. Катастрофа «сборка»

Катастрофа «сборка», описываемая поверхностью равновесия, содержащей складку, проиллюстрирована на рис. 2, где осями трёхмерного пространства являются управляющие параметры a, b (по горизонтали) и параметр состояния x (по вертикали). Воздействие на равновесное состояние происходит в виде плавного или катастрофического перемещения вдоль поверхности Σ_V . Например, точка B подвергается действию и плавно перемещается в точку B_0 вниз, представляющую собой уменьшение потенциала, но точка может столкнуться с краем сгиба, где небольшое изменение параметров (триггер) вызывает падение или катастрофический скачок к нижнему равновесию A_0 . Управляющая поверхность – это поверхность, определяемая управляющими параметрами или проекцией трёхмерной поверхности равновесия на двумерное управляющее пространство ab (см. [3]).

Уравнение (2) – это условие равновесия сил.

Разлагая в ряд Тейлора по u_1 правую часть уравнения (2) и отбрасывая все члены, кроме первых трёх, поскольку элемент третьего порядка является минимальным вдали от нуля, в то время как $G_e l_e e^2 / G_s l_s \rightarrow 1$ и $(l + G_e l_e e^2 / G_s l_s) \rightarrow mgh e^2 \sin \beta / G_s l_s u_1$, где $u_1 = 2u_0$, получаем

$$\frac{2 G_s l_s u_1 e^{-2}}{3 h} \left[\left(\frac{u - u_1}{u_1} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{G_e l_e e^2}{G_s l_s} - 1 \right) \left(\frac{u - u_1}{u_1} \right) + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{G_e l_e e^2}{G_s l_s} - \frac{mgh \sin \beta}{G_s l_s u_1} \right) \right] = 0. \quad (3)$$

Полагая

$$x = \frac{u - u_1}{u_1}, \quad a = \frac{3(k - 1)}{2}, \quad b = \frac{3(1 + k - k\xi)}{2}, \quad k = \frac{G_e l_e u_1 e^2}{G_s l_s}, \quad \xi = \frac{mgh \sin \beta}{G_e l_e u_1},$$

можно (3) переписать в виде

$$x^3 + ax + b = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) определяет стационарные равновесия системы

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (5)$$

$$V(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx,$$

подверженной катастрофе «сборка» [1]. Её бифуркационное множество

$$B_V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 2a^3 + 27b^2 = 0\} \quad (6)$$

задаёт кривую на плоскости ab , пересечение которой влечёт скачкообразные изменения смещения x .

Условия для катастрофы [5]. Бифуркационное множество определяет пороговые значения, при которых наиболее вероятно возникновение катастрофы. Катастрофа неизбежна, когда траектория управляющих параметров a, b проходит через бифуркационное множество (6).

Следовательно, для того чтобы произошла катастрофа, необходимо выполнение следующего условия:

$$a \leq 0, \quad (7)$$

что подразумевает

$$k \leq 1, \quad (8)$$

или

$$k = \frac{G_e l_2 e^2}{G_s l_1} \leq 1 \Rightarrow G_e l_2 e^2 \leq G_s l_1.$$

Уравнение (8) показывает, что чем меньше жёсткость грунта 1, тем больше постпиковая жёсткость (абсолютное значение наклона определяющей кривой после пикового напряжения) грунта 2 и тем больше вероятность того, что на склоне произойдёт катастрофа. Поскольку коэффициент жёсткости зависит от геометрического размера и свойств грунтов, необходимое условие, приводящее к катастрофе, связано только с внутренними характеристиками системы. Если грунт внедрения целиком затвердевший или один грунт упругий, а другой идеально пластичный, то $k \rightarrow \infty$ и сползания оползня не будет.

Условие стабильности склона. В соответствии с теорией катастрофы «сборка» склон стабилен, если $a > 0$ или $k > 1$.

3.2. Модель плоского склона. Случай упругого и упруго-пластического грунтов

В работе [7] рассмотрена механическая модель оползня на плоском склоне, представляющего собой неоднородную интеркаляцию, состоящая из двух грунтов с разными свойствами, где один грунт – упругая среда, другой – упруго-пластическая среда.

Предполагается, что поверхность скользящего откоса наклонена под углом β к горизонтали, а масса грунта над поверхностью скольжения представляет собой жёсткую породу (рис. 3).

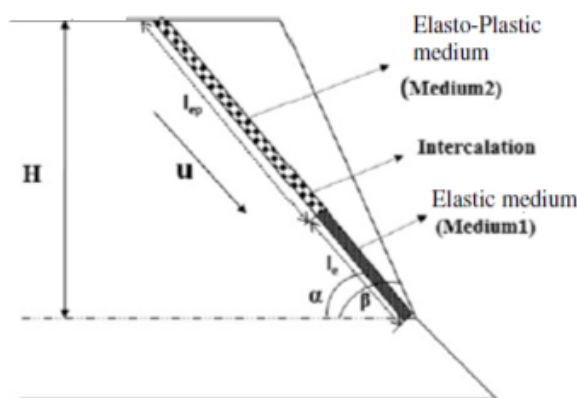


Рис. 3. Механическая модель плоского скользящего склона с фактором смещения α [7]

В отличие от уравнения потенциальной функции для механической модели, приведённого в предыдущем параграфе, в котором неоднородная интеркаляция состоит из смягчающей среды, в этом параграфе смягчение деформации считается упруго-пластическим.

Общая потенциальная энергия V системы определяется выражением:

$$V = l_{ep} \int_0^u \frac{G_{ep}u}{h} e^{-(\alpha u/u_0)} du + \frac{1}{2} \frac{G_e l_e}{h} u^2 - mgu \sin \beta, \quad (9)$$

где G_{ep} – начальный модуль сдвига; G_e – модуль сдвига; u – смещение; u_0 – величина смещения при пиковом напряжении (рис. 4); α – фактор смещения; l_{ep} и l_e – длины поверхности скольжения упруго-пластического грунта 2 и упругого грунта 1 соответственно; H – высота горного массива; h – толщина интеркаляции; β – угол наклона склона; mg – вес горной массы.

Коэффициент смещения α используется для оценки напряжения сдвига грунта 2, для прогнозирования поведения грунта при различных условиях нагрузки.

Как и в предыдущем параграфе, можно найти коэффициент жёсткости

$$k = \frac{G_e l_e}{G_{ep} l_{ep} e^{-(\alpha u/u_0)}}, \quad (10)$$

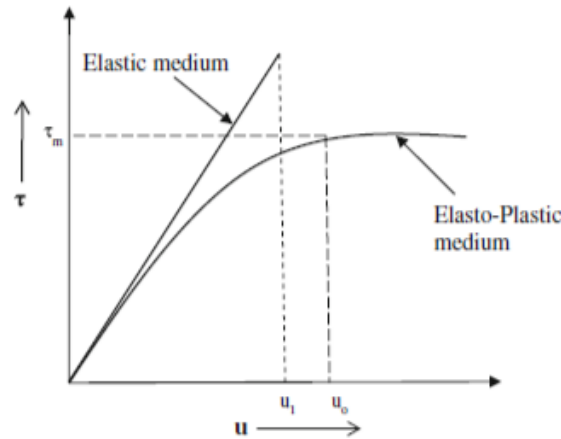


Рис. 4. Кривая зависимости напряжения сдвига от смещения для двух грунтов [7]

участвующий в выражении для необходимого условия осуществления катастрофы «сборка», выраженный через отношение смещения u/u_0 и фактор смещения α . (Отношение жёсткости определяется как отношение жёсткости эластичных сред к жёсткости упруго-пластичных сред. Жёсткость грунтовой среды, как видим, зависит от модуля сдвига грунтов и их длин.)

Выполнение неравенства $k \leq 1$ является необходимым условием возникновения катастрофы «сборка», т. е. условием катастрофического оползня согласно теории катастрофы «сборка».

Фиксируя $u/u_0 = 2$, авторы изменения u/u_0 сводят к изменениям фактора α .

На рис. 5 показано изменение соотношения жёсткости k относительно отношения длин l_e/l_{ep} и фактора смещения α . Коэффициент жёсткости k линейно увеличивается с увеличением отношения длин и фактора смещения. Соотношение длин l_e/l_{ep} зависит от угла наклона плоского скольжения β . Увеличение отношения l_e/l_{ep} приводит к увеличению коэффициента жёсткости k вдоль плоскости скольжения. Согласно теории катастрофы «сборка», если $k > 1$, то склон устойчив. На этом графике $k > 1$ при определённом соотношении l_e/l_{ep} , но склон по-прежнему скользит из-за просачивания дождевой воды. При таких оползнях, вызванных осадками, модуль сдвига почвенных сред изменяется в зависимости от давления поровой воды, приводящего к неравенству $k < 1$.

Критический коэффициент безопасности (FoS_c), определяемый отношением силы сопротивления к движущей силе при смещении u , равен

$$FoS_c = \frac{(1 - \sqrt{2(1-k)}/2)(e^{\sqrt{2(1-k)}} + k)}{1 + k + \frac{\sqrt{2}}{3}(1-k)^{3/2}}. \quad (11)$$

Фактор запаса прочности основан на свойстве жёсткости грунта при разрушении. Механизм разрушения оползней с критическим коэффициентом безопасности больше единицы подробно обсуждается в статье [7].

Изменение критического коэффициента безопасности FoS_c в зависимости от отношения смещения u/u_0 показано на рис. 6. Критический коэффициент безопас-

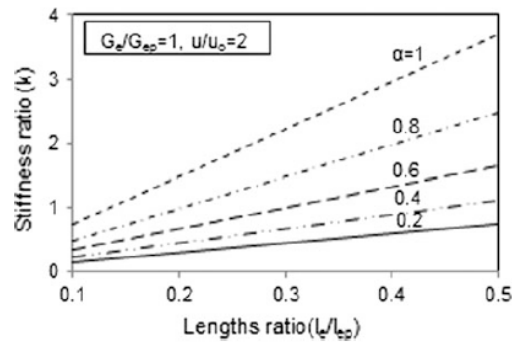


Рис. 5. Изменение коэффициента жёсткости k в зависимости от отношения длин l_e/l_{ep} для различных факторов смещения α [7]

ности уменьшается с увеличением u/u_0 и α . Увеличение фактора смещения возможно, когда напряжение сдвига вдоль плоскости скольжения уменьшается из-за различных условий нагружения. Фактор смещения α высок для плотного грунта, что указывает на то, что смещение увеличивается вдоль склона и снижает критический коэффициент безопасности. Несмотря на то, что $FoS_c = 1,37$, для $\alpha = 0,6$ и $u/u_0 = 2$, существует вероятность возникновения соскальзывания оползня в соответствии с теорией катастрофы «сборка».

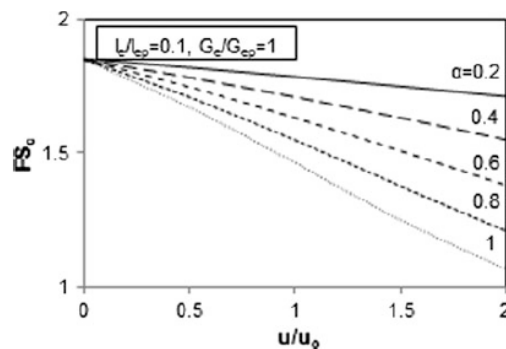


Рис. 6. Изменение критического коэффициента безопасности FoS_c в зависимости от отношения смещения u/u_0 [7]

Авторы обзора статьи [7] анализируют и другие интересные ситуации, связанные с возможностью образования катастрофического оползня.

3.3. Оползень скольжения с выпучиванием

Модель оползня скольжения с выпучиванием была предложена в статье [4].

Под действием движущей силы, обусловленной собственным весом каменных плит или давлением поровой воды, плиты вблизи подножия склона постепенно прогибаются, и, соответственно, плиты над прогибом скользят по слабому промежуточному слою (рис. 8, а). В условиях, когда длина и ширина каменной плиты намного

превышают её толщину, деформация каменных плит авторами рассматривается как проблема устойчивости балки.

Иначе говоря, движение и деформация реального оползня (рис. 7) изучаются на основе механической модели. Эта механическая модель представлена на рис. 8, б).

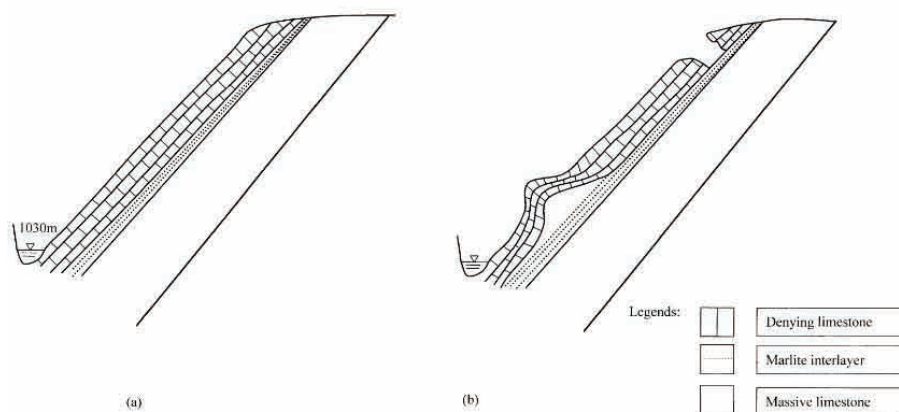


Рис. 7. Принципиальные схемы, показывающие процесс разрушения оползня на горе Баванг: а) до деформации; б) во время деформации [4]

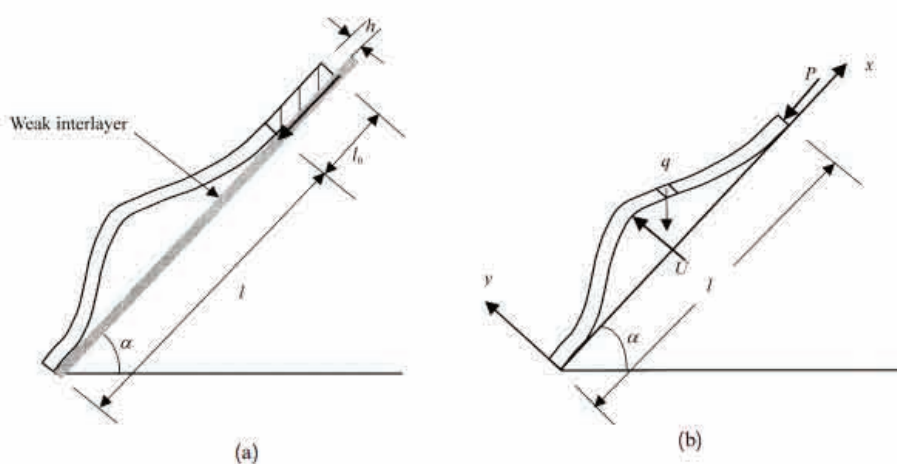


Рис. 8. Скольжение с выпучиванием: а) геометрические условия; б) механические условия [4]

Пусть длина склона, подверженного выпучиванию, длина участка движения, общая толщина каменных плит и угол наклона равны l , l_0 , h и α соответственно. Остаточная движущая сила вдоль прослойки равна

$$P = [q \sin \alpha - (C + q \cos \alpha \operatorname{tg} \phi)] l_0,$$

где $q = \gamma h$ – интенсивность гравитационной нагрузки; γ – удельный вес каменной плиты; C и ϕ – угол внутреннего трения и единичная сила сцепления прослойки соответственно.

Обозначим через U поровое давление воды, вызванное проникновением осадков в тело склона по нарушениям сплошности. Для простоты будем считать, что давление постоянно или линейно распределено и давлению подвергается только участок выпучивания. Согласно экспериментам (1988), с колоннами горных пород при одноосном сжатии Саном [8] разумно предположить, что кривая отклонения имеет вид:

$$y = u\left(1 - \sin \frac{2\pi x}{l}\right), \quad (12)$$

где u – значение прогиба при $x = l/4$. Легко проверить, что уравнение (12) удовлетворяет граничному условию.

Потенциальная функция системы. Рассматривая процесс квазистатического движения склона скольжения, мы сначала устанавливаем выражение полной потенциальной энергии, затем определяем механический критерий неустойчивости склона.

Согласно теории упругости энергия деформации, запасённая в балке, равна

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l M(x) d\phi, \quad (13)$$

где $M(x)$ – изгибающий момент на расстоянии x от носка ската, а $d\phi$ можно выразить как

$$d\phi = \frac{ds}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} ds, \quad (14)$$

где E и I – модуль упругости и момент инерции балки соответственно; ds – длина дуги, соответствующая радиану $d\phi$; ρ – радиус кривизны.

Используя известное выражение (Ванг, [9])

$$M(x) = EIy'' \quad (15)$$

и подставив уравнения (14) и (15) в (13), приводят

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (16)$$

где $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$; y' и y'' – первая и вторая производные y соответственно.

Разлагая в ряд Тейлора в уравнении (16) радикал в подинтегральном выражении

$$ds \approx 1 + 0,5(y')^2, \quad (17)$$

имеем

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 \left[1 + \frac{1}{2}(y')^2\right] dx = \frac{EIl}{32} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^6 u^4 + \frac{EIl}{4} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 u^2. \quad (18)$$

Работа, выполняемая остаточной движущей силой P , равна

$$V_2 = \frac{1}{2} P \int_0^l (y')^2 dx = \frac{Pl}{4} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 u^2. \quad (19)$$

Работа, выполняемая собственным весом балки, равна

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^l q(l-x)(y')^2 \sin \alpha dx = \frac{ql^2}{8} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin \alpha u^2. \quad (20)$$

Приращение потенциальной энергии, вызванное собственным весом балки, равно

$$V_4 = \int_0^l qy \cos \alpha dx = qly \cos \alpha. \quad (21)$$

Работа, выполняемая давлением поровой воды U , равна

$$V_5 = Uu. \quad (22)$$

Следовательно, получаем общую потенциальную энергию системы

$$V = V_1 - V_2 - V_3 + V_4 - V_5. \quad (23)$$

Следующее уравнение получено благодаря подстановки уравнений (18)–(22) в уравнение (23):

$$V = \frac{EI l}{32} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^6 u^4 + \frac{1}{4} \left[EI l \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 - Pl \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} ql^2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin \alpha \right] u^2 + (ql \cos \alpha - U)u. \quad (24)$$

Считаем, что найдено выражение для энергии изучаемой нами системы, т. е. для оползня.

Чтобы преобразовать уравнение (24) в стандартную форму катастрофы «сборка», положим

$$x = \left[\frac{EI l}{8} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^6 \right]^{1/4} u, \quad (25)$$

$$a = \frac{1}{2} \left[EI l \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 - Pl \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 - \frac{ql^2}{2} \sin \alpha \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \right] \left[\frac{8}{EI l \left(\frac{2\pi}{l} \right)^6} \right]^{1/2}, \quad (26)$$

$$b = (ql \cos \alpha - U) \left[\frac{8}{EI l \left(\frac{2\pi}{l} \right)^6} \right]^{1/4}. \quad (27)$$

Подстановка уравнений (25)–(27) в (24) приводит к

$$V = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx. \quad (28)$$

Уравнение (28) представляет собой стандартную модель потенциальной функции катастрофы «сборка», в которой a и b являются управляющими параметрами, а x – переменной состояния.

Поверхность равновесия, состоящая из множества всех точек равновесия, может быть получена из уравнения (28) в виде набора особенностей функции V :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^3 + ax + b = 0.$$

Когда множество вырожденных особенностей, или множество особенностей

$$\Sigma_V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 3x^2 + a = 0$$

проецируется на плоскость ab , получается бифуркационное множество B_V , имеющее форму остrokонечной кривой (рис. 2).

4. Успешное предсказание

4.1. Катастрофический характеристический индекс

Пусть

$$D = 4a^3 + 27b.$$

Бифуркационное множество $D = 0$ определяет пороги [10], при которых могут произойти внезапные изменения. Пока состояние системы остаётся вне бифуркационного множества ($D > 0$), поведение меняется плавно и непрерывно в зависимости от параметров управления. Даже при входе в бифуркационное множество ($D < 0$) резкого изменения не наблюдается. Однако когда контрольная точка проходит весь путь через бифуркационное множество ($D = 0$), катастрофа неизбежна.

В последующем анализе D называется *катастрофическим характеристическим индексом*.

4.2. Описание оползня Джимингси

Оползень Джимингси в уезде Цзыгуй провинции Хубэй (КНР), объёмом около 6105 м^3 , произошёл 29 июня 1991 г. (рис. 9). Оползневая масса состояла из твёрдого известняка с мягкими и тонкими прослоями марлита. Оползень был вызван добычей известняка и представлял собой типичную нестабильность плоского сдвига с углом наклона 35° .

Динамика смещения описывалась уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -0.5161(x^3 - 1.03701x - 0.4282).$$

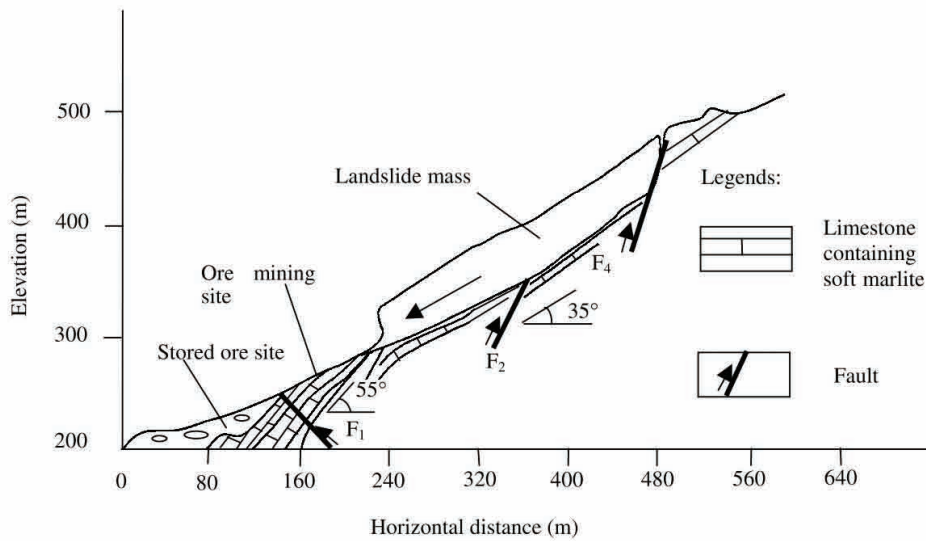


Рис. 9. Геологическое сечение оползня Джимингси [10]

Рис. 10 показывает, что прогнозные (forecasting) с помощью этого уравнения значения x хорошо согласуются с контролируемыми (monitoring) значениями. Выбирая данные между началом наблюдения и определённым моментом, мы можем получить ряд значений a , b и D .

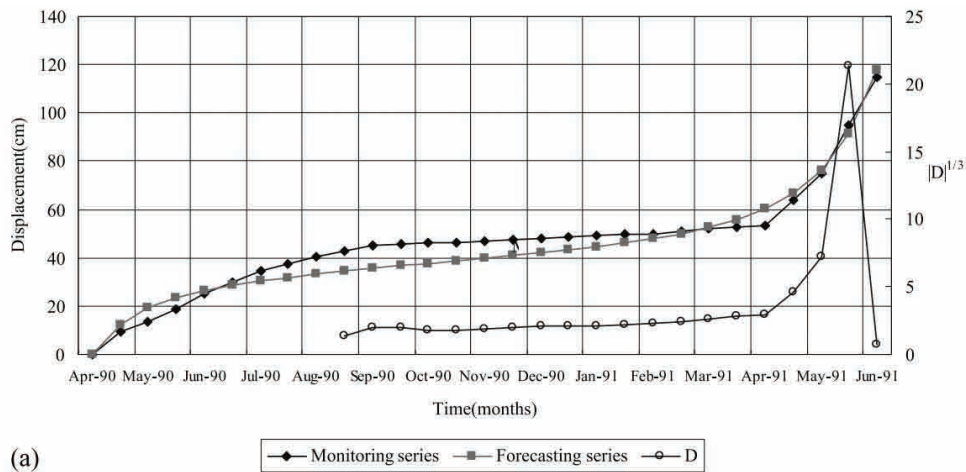


Рис. 10. Кривые контролируемых и прогнозных значений и катастрофического характеристического показателя $|D|$ [10]

Из рис. 10 также видно, что катастрофический характеристический показатель $|D|$ ведёт себя как относительно устойчивое изменение в течение фазы вторичной ползучести, затем она начинает быстро нарастать и достигает чрезвычайно высокого пикового значения после вступления в третичную ползучесть, и в конечном итоге быстро падает примерно до нуля перед оползневой нестабильностью, как и ожидалось. Таким образом, индекс D можно рассматривать как важный показатель,

указывающий на предшествующую катастрофе аномальность оползня.

5. Виды катастроф и соответствующие им виды оползней

В статье [11] А.В. Ефремов описал виды оползней, возникающих в процессе перехода оползней из стационарного положения (устойчивое и неустойчивое) в активное состояние, и сопоставил их с типами катастроф.

Из семи видов катастроф, зафиксированных теорией катастроф Тома, три («сборка», «складка», «ласточкин хвост») отражают катастрофы, возникающие в оползневом процессе. Автор описывает сущность этих катастроф оползневого процесса и условия их возникновения.

Однако смысл переменных $x, u \in \mathbb{R}^k$, посредством которых описываются катастрофы Тома, автор указывает только для катастрофы «сборка». А его рассуждения о двух крыльях оползня, для которого используется катастрофа «ласточкин хвост», – это лишь фраза, поскольку множество катастроф C_V в данном случае представляет собой поверхность в 4-мерном пространстве и без указания смысла x, u_1, u_2, u_3 трудно понять как появляются разные крылья оползня (§ 4.3).

Однако статья А.В. Ефремова адресовалась специалистам в области архитектуры и строительства, и её появление в любом случае должно приветствоваться.

5.1. Складка: оползень выдавливания

Катастрофы типа «складка» образуются при движении оползней типа «выдавливание». При этом они могут образовываться как при плавном сдвиге оползня, так и при динамическом толчке. Здесь механика катастроф следующая.

В головной части оползня происходит выдавливание приподошвенного слоя из-под вышележащего жёсткого смещающегося блока, в средней и языковой частях блокового смещения по определённой поверхности, т. е. происходит как бы «подныривание» одной части блока под другую (рис. 11).

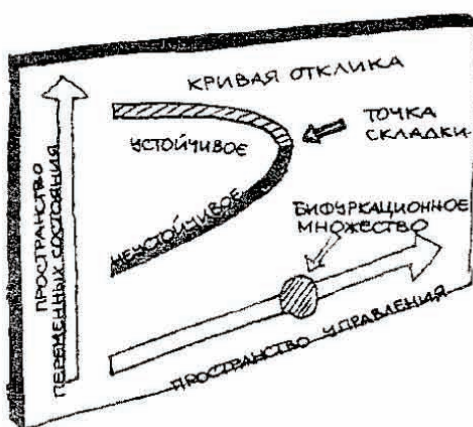


Рис. 11. Кривая катастрофы «складка – выдавливание» [11]

5.2. Сборка (cusp): оползень надвига

Катастрофа «сборка» происходит в основном при динамическом воздействии на оползень (скажем, сейсмическом толчке). Механизм образования следующий: происходит сейсмический толчок со значительным коэффициентом сейсмического ускорения, однако на пути массив большего объёма и веса, с большим коэффициентом сцепления и трения, который сила сейсмического ускорения сдвинуть не может. В этом случае сила сейсмического ускорения растрачивается на надвиг верхнего массива по уклону по поперечной к линии движения трещине на нижнюю часть массива оползня (рис. 12).

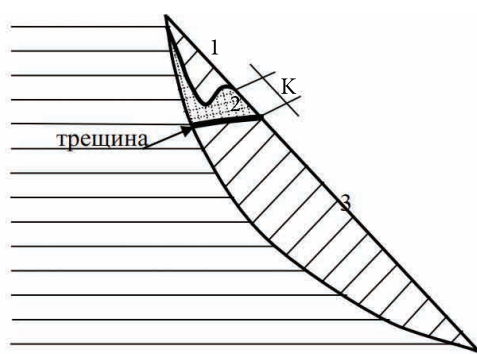


Рис. 12. Катастрофа «сборка – надвиг»: 1 – верхний по отношению к трещине массив; 2 – К-зона катастрофы (разрушенный массив); 3 – нижний по отношению к трещине массив [11]

В результате разрушения массива пород и смещения поверхности оползня по вертикали все строения в пределах катастрофы разрушаются.

5.3. Ласточкин хвост: оползень выдавливания с 2 языками

Катастрофа «ласточкин хвост», так же как и катастрофа «складка», образуется при движении оползней типа «выдавливание». Разница с тем, что происходит при катастрофе «складка», в том, что выдавливание пород происходит в одном крыле оползня, а при катастрофе «ласточкин хвост» – в двух крыльях одновременно (рис. 13). Поэтому и последствия более катастрофические – все строения в местах выдавливания на обоих крыльях будут разрушены.

6. Заключение

В обзоре представлены ключевые статьи по теоретико-катастрофическому описанию оползней. До 2001 г., т. е. до появления статей [3, 4], имели место только различного рода разговоры о возможном применении теории катастроф к оползневым процессам. На сегодня появилось значительное количество работ на эту тему, но чаще всего на китайском языке [3, 4, 6, 8–18]. В России таких публикаций практически нет. Думается, что определённые успехи подобного рода исследований будут стимулировать появление статей на данную тему и в России.



Рис. 13. Объем откликов с изображением двух сечений этого объема, соответствующих двум сечениям бифуркационного множества (а), фигура «ласточкин хвост» (б) [11]

7. Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № государственной регистрации 122032300363-3).

Литература

1. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. М. : Мир, 1982. 608 с.
2. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М. : МЦНМО, 2009. 672 с.
3. Qin S., Jiao J.J., Wang S., Long H. A nonlinear catastrophe model of instability of planar-slip slope and chaotic dynamical mechanisms of its evolutionary process // *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. P. 8093–8109.
4. Qin S.Q., Jiao J.J., Wang S.J. A cusp catastrophe model of instability of slip buckling slope // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2001. Vol. 34. P. 119–134.
5. Sarma C.P., Krishna A.M., Dey A. Landslide Evolution through Catastrophe Theory based on Planar-Slip Slope Model // *Indian Geotechnical Conference 2017 GeoNEst*, 14-16 December 2017, IIT Guwahati, India.
6. Tao Y., Cao J., Hu J., Dai Z. A cusp catastrophe model of mid-long-term landslide evolution over low latitude highlands of China // *Geomorphology*. 2013. Vol. 187. P. 80–85.
7. Padmaja S.B., Reddy G.V.N., Reddy E.S. A Catastrophe Theory for Planar Sliding Slope // *Soil Dynamics and Earthquake Geotechnical Engineering. Lecture Notes in Civil Engineering book series*. 2018. Vol. 15. Springer Nature. Singapore Pte Ltd. 2019. P. 259–266.
8. Sun G.Z. Rock mass structure mechanics Beijing : Science Press, 1988 (in Chinese).
9. Wang Y.L. Material mechanics. Beijing: Science Press, 1979.
10. Siqing Q., Jiao J.J., Li Z.G. Nonlinear Evolutionary Mechanisms of Instability of PlaneShear Slope: Catastrophe, Bifurcation, Chaos and Physical Prediction // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2006. V. 39(1). P. 59–76.
11. Ефремов А.В. Виды катастроф в оползневом процессе // *Строительство и техногенная безопасность*. 2014. № 51. С. 63–67.
12. Dazaa S.L.C., Mayorga F.N. Simplified Model of the Catastrophe Theory for the Landslides Study // *Revista Ciencia en Desarrollo*. 2015. Vol. 6, No. 1. P. 61–65.

13. Hadi A.I., Brotopuspito K.S., Pramumijoyo S., Hardiyatmo H.C. Application of catastrophe theory in landslide case, and its relationship with the slope stability // AIP Conference Proceedings 2320. 2021. Art. 040017. DOI: 10.1063/5.0037644.
14. Padmaja S.B., Reddy G.V.N., Reddy E.S.. Landslide stability analysis using mathematical approach // Materials Today: Proceedings. 2022. Vol. 51, Part 1. P. 596–599.
15. Jurui Y. The Cusp-Catastrophe Model of Landslide Caused // 12th ISCO Conference. Beijing, 2002. P. 193–198.
16. Rui Z., Rongchang G., Pan H., Lingyan Y. Landslide hazard assessment based on improved catastrophe theory // The Chinese Journal of Geological Hazard and Control. 2023. Vol. 34(1). P. 121–128.
17. Shengyuan S., Qing W., Yuzhen P. et al. Evaluation of landslide susceptibility degree based on catastrophe theory // Rock and Soil Mechanics. 2014. Vol. 35(2). P. 422–428.
18. Kaining Y., Tao W., Aihua W., Yupu W., Fenggang D., Yu L. // Geological hazard assessment based on the models of AHP, catastrophe theory and their combination: A case study in Pingshan County of Heibei Province // The Chinese Journal of Geological Hazard and Control. 2023. Vol. 34(2). P. 146–146.

THEORETICAL-CATASTROPHIC MODELS OF LANDSLIDE PROCESSES

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Leading Scientist Researcher, e-mail: aguts@mail.ru

Federal Research Centre the Subtropical Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
Sochi, Russia

Abstract. A review presenting works on the application of the mathematical theory of catastrophes to the description of landslide processes. These works are mainly successfully carried out in China and India, where destructive landslides pose a serious danger to both the economy and people's lives.

Keywords: landslides, catastrophe theory, review.

Дата поступления в редакцию: 19.09.2023