А.К. ГУЦ, А.В. ЛЕВИЧЕВ

К ОСНОВАНИЯМ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 11 VIII 1983)

В основе предлагаемой системы аксиом лежит определение пространства–времени, данное А.Д. Александровым [1, 2]. Согласно этому определению, пространство–время есть множество всех событий в мире, отвлеченное от всех его свойств, кроме тех, которые определяются отношениями воздействия одних событий на другие. Иными словами, пространственно-временная структура мира есть не что иное, как его причинно-следственная структура, взятая в соответствующей абстракции.

1. Пусть V – некоторое непустое множество точек – мир событий, на котором задан частичный прядок $\leqslant$ – отношение предшествования или воздействия событий. Положим

$$P_x = \{ y \in V: x \leqslant y\}, \quad P_x^- = \{ y \in V: y \leqslant x\}.$$

Множество P_x (соответственно P_x^-) интерпретируется как множество тех событий, на которые может воздействовать событие x (которые могут воздействовать на x).

1.1. Аксиомы порядка.

(A_1) Система множеств $\{ P_x\}$ задает нетривиальный частичный порядок на V, т.е.: 1) для любого x из V точка x принадлежит P_x; 2) $P_x \neq \{ x\}$, 3) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$.

(A_2) Никакой интервал $P_x \cap P_y^-$ не сводится к паре точек x, y, т.е.

$$P_x \cap P_y^- \neq \{x, y\}.$$

Аксиома A_2 постулирует, что воздействие от x к y передается через некоторые промежуточные события, а не скачком.

1.2. Аксиома топологии. Пусть $\mathscr{B}$ – семейство всех множеств вида $(P_x \setminus P_y^-) \setminus A_{x,y}$, где A_{xy} – объединение всех линейно упорядоченных интервалов $P_a \cap P_b^- \subset P_x \cap P_y^-$, $b \in \bar{P}_a$, таких, что либо $a = x$, либо $b = y$. Рассмотрим на V топологию $\mathscr{T}_{\leqslant}$ с предбазой $\mathscr{B}$.

(A_3) $\langle V, \mathscr{T}_{\leqslant}\rangle$ есть связное односвязное хаусдорфово четырехмерное локально-компактное пространство.

1.3. Аксиома однородности пространства-времени.

(A_4) На пространстве $\langle V, \mathscr{T}_{\leqslant}\rangle$ транзитивно действует коммутативная группа T гомеоморфизмов V на себя такая, что для любых $x \in V$, $t \in T$ имеем

$$t(P_x) = P_{t(x)}.$$

Теорема 1 [3]. *Если выполняются аксиомы* A_3, A_4, *то* $\langle V, \mathscr{T}_{\leqslant}\rangle$ *можно оснастить аффинной структурой, причем* $\mathscr{T}_{\leqslant}$ *будет эквивалентна естественной топологии четырехмерного аффинного пространства, а* T *изоморфна группе параллельных переносов.*

1.4. Аксиомы связи порядка и топологии.

(A_5) Для любых $x, y \in V$ интервалы $P_x \cap P_y^-$ компактны.

(A_6) Все множества P_x замкнуты: $P_x = \bar{P}_x$.

(A_7) Каждое множество P_x имеет внутренние точки $\operatorname{int} P_x \neq \phi$.

Аксиома A_5 означает ограниченность скорости передачи воздействия, A_6 говорит о существовании воздействия с фундаментальной скоростью, предельной для прочих воздействий и ограничивающей их скорости распространения. Аксиоме A_7 можно дать следующую интерпретацию. С некоторого момента времени во: действие непрерывно распространяется во всех направлениях хотя бы в одной точк 3-пространства. Кроме того, из этой аксиомы следует, что предбаза $\mathscr{B}$ непуст:

1.5. Аксиома связи порядка и движения. Пусть G – групп всех биекций V на себя, сохраняющих порядок, т.е. для любых $g \in G$ и $x \in V$ имеег $g(P_x) = P_{g(x)}$. Через G_x обозначим подгруппу группы G, состоящую из таких биек ций $g \in G$, что $g(x) = x$. В силу того, что топология $\mathscr{T}_{\leqslant}$ определяется через поря док, группа G состоит из непрерывных отображений, а вследствие их биективнс сти – из гомеоморфизмов.

(A_8) Группа G_x действует транзитивно на $\partial P_x \setminus \{x\}$, где ∂P_x – граница мнс жества P_x.

Аксиома A_8 может быть названа аксиомой изотропности 3-пространства так как она говорит о равноправности всех направлений физического пространства

1.6. Теорема 2. *Пусть выполняется система аксиом* $\langle A_1 - A_8 \rangle$. *Тогд* $\langle V, \mathscr{T}_{\leqslant} \rangle$ *можно отождествить с четырехмерным аффинным пространством, и группу* T *с группой его параллельных переносов. В* V *можно ввести такие декарто вы координаты* $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, *что*

$$P_x = \left\{ y \in V \colon (x_0 - y_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2 \geqslant 0 \ \text{ и } \ x_0 \leqslant y_0 \right\},$$

т.е. $\{P_x\}$ – *система равных и параллельных замкнутых телесных эллиптических конусов, а группа* G *изоморфна группе Пуанкаре, включая подобия* $x \to \lambda x$, $\lambda > 0$ *и исключая отражения* $x \to (-x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Доказательство. Аффинность структуры пространства V установлена в теореме 1. Затем используется следующая сформулированная А.Д. Александровым и доказанная в [4]

Теорема. *Если в конечномерном аффинном пространстве* V *задан такой инвариантный относительно параллельных переносов порядок, что все* P_x *замкнуты, а все интервалы* $P_x \cap P_y^-$ *ограничены и не сводятся к* $\{x, y\}$, *то* $\{P_x\}$ - *система равных и параллельно расположенных выпуклых конусов.*

Из A_5 следует, что конусы P_x имеют острую вершину, т.е. не содержат прямой. Таким образом, группа G сохраняет систему конусов $\{P_x\}$. Если P_x не есть квазицилиндр, то все преобразования из G аффинны [5], теорема 3. Если P_x – квазицилиндр, т.е. $P_x = L_1 \times \ldots \times L_k \times K_x$, где L_i – лучи с началом x, а K_x – замкнутый выпуклый конус, не представимый в виде прямого произведения луча на конус меньшей размерности, то P_x имеет выделенные крайние лучи L_i, которые нельзя будет с помощью группы G_x перевести в любую заданную образующую конуса ∂P_x. Последнее противоречит аксиоме A_8. Итак, все преобразования из группы G аффинны, а подгруппа G_x действует транзитивно на образующих конуса ∂P_x, как это следует из аксиомы A_8. По теореме Буземана [6], с. 34, конус ∂P_x эллиптический. Поэтому G – группа Пуанкаре с добавлением подобий $x \to \lambda x$, $\lambda > 0$ и исключением отражений $x \to (-x_0, x_1, x_2, x_3)$. Теорема доказана.

2. Откажемся от требования, что топология определяется порядком, и введем аксиому

(A_3^*) V есть связное односвязное хаусдорфово четырехмерное локально-компактное пространство.

Теорема 3. *Если выполняются аксиомы* $\langle A_1, A_2, A_3^*, A_4 - A_8 \rangle$, *то справедливо утверждение теоремы* 2.

Доказательство остается тем же самым, если учесть, что на основании теоремы непрерывности из [2], с. 45, все g из G оказывают геомеоморфизмами.

3. В изложенной выше системе аксиом самым неудовлетворительным являет-

ся требование коммутативности группы T. Покажем, как можно от него отказаться. Для краткости формулировок будем смотреть на пространство–время как на упорядоченную группу $V = T$. Отказ от коммутативности приводит к необходимости различать правое и левое умножение элементов группы V. Например, в [7] описана аксиоматика пространства–времени де Ситтера в терминах левоинвариантного порядка, не являющегося биинвариантным. Тем самым мы с необходимостью приходим к изучению биинвариантных порядков на группах.

Пусть $\mathscr{T}_{\leqslant}$ – топология на V, описанная в начале статьи. Введем следующие аксиомы.

(B_1) $\langle V, \mathscr{T}_{\leqslant} \rangle$ – связная локально-компактная четырехмерная топологическая группа*.

(B_2) Порядок $\{P_x\}$ на V является биинвариантым, т.е. $P \cdot P \subset P$, где $P = P_e$, e – единица группы V, $P_x = x \cdot P = P \cdot x$ для всех $x \in V$.

(B_3) Существует точка $x \in \partial P \setminus \{e\}$ такая, что множество

$$M_x = \bigcup_{e,\, x \in \partial P_y} P_y$$

есть максимальная подполугруппа, т.е. если $M_x \subset H \subset V$, где H – подполугруппа, то $H = M_x$ или $H = V$.

Из аксиомы B_2 следует, что M_x – нормальная подполугруппа, т.е. для любого $a \in V$ имеем $a \cdot M_x = M_x \cdot a$. Пусть $\mathscr{K}$ – семейство всех множеств вида

$$\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha \cdot M_\alpha,$$

где $x_\alpha \in V$, $M_\alpha \in M$, M – семейство всех максимальных подполугрупп группы V, A – множество индексов (произвольное).

Множества семейства $\mathscr{K}$ будем называть в ы п у к л ы м и.

(B_4) Топология $\mathscr{T}_{\leqslant}$ выпуклая, т.е. существует база окрестностей единицы группы, состоящая из окрестностей с замыканиями, являющимися выпуклыми множествами.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняется система аксиом* $\langle A_1, A_2, B_1\text{–}B_4, A_5\text{–}A_8 \rangle$. *Тогда группа* $\langle V, \mathscr{T}_{\leqslant} \rangle$ *изоморфна 4-мерному арифметическому (векторному) пространству* $\mathbf{R}^4$ *с естественной топологией,* $\{P_x\}$ *– система равных и параллельных замкнутых телесных эллиптических конусов в* $\mathbf{R}^4$ *(при отождествлении* V *с* $\mathbf{R}^4$*), а группа* G *изоморфна группе Пуанкаре, включая подобия* $x \to \lambda x$, $\lambda > 0$ *и исключая отражения* $x \to (-x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из B_1–B_4 и [8], теорема 2, следует, что $\langle V, \mathscr{T}_{\leqslant} \rangle \cong \cong \mathbf{R}^4$. Отождествляя V с $\mathbf{R}^4$, мы получим инвариантный порядок P в $\mathbf{R}^4$, удовлетворяющий условиям A_1, A_2, A_5–A_8. Остальное аналогично доказательству теоремы 2.

4. Предполагается вероятным, что для связных односвязных многообразий общей теории относительности, допускающих просто-транзитивную группу движений (их классификация имеется в [9]), возможна единая аксиоматизация, подобная излагаемой в этой статье (см. также в [7] аксиоматику пространства времени де Ситтера). С точки зрения той фундаментальной роли, которую играет причинность в окружающем нас материальном мире, такой подход представляется более естественным, нежели отправление от уравнений Эйнштейна. Очевидно, что для построения такой аксиоматики необходима развитая теория упорядоченных групп Ли, многие вопросы которой разработаны в последние годы.

4.1. Пусть V – связная односвязная вещественная группа Ли, на которой задан биинвариантный порядок P, причем $P \cap P^{-1} = \{e\}$ и $\bar{P} = P$. Как показал Э.Б. Вин-

*Хаусдорфова.

берг [10], контингенция K множества P в единице группы есть замкнутый выпуклый конус в алгебре Ли v группы V. Его образ при экспоненциальном отображении содержится в P. Ясно, что K не содержит прямой. При этом K должен быть инвариантным относительно действия всех операторов присоединенного представления группы V, в частности, относительно действия операторов вида $e^{\mathrm{ad}\,X}$.

Теорема 5. *Если биинвариантный порядок на четырехмерной некоммутативной группе Ли V таков, что контингенция K содержит внутренние точки, то или $V = G_4\mathrm{III}$ с $q = 0$, или $G_4\mathrm{VII}$, или $G_4\mathrm{VIII}$.*

Здесь использованы обозначения групп из [9].

Таким образом, условие коммутативности группы в аксиоматике специальной теории относительности ослабляется до экспоненциальности (группа называется экспоненциальной, если экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом алгебры на группу). Действительно, группы $G_4\mathrm{VII}$, $G_4\mathrm{VIII}$ неразрешимые и, следовательно, неэкспоненциальные, а группа $G_4\mathrm{III}$ с $q = 0$ (далее обозначаем ее просто $G_4\mathrm{III}_0$) разрешима, но неэкспоненциальна.

Вообще среди всех 4-мерных групп Ли неэкспоненциальны четыре, а также все группы однопараметрического семейства $G_4\mathrm{VI}_2\,(k, l)$ с $k = 0$.

4.2. Замкнутый инвариантный выпуклый конус с внутренними точками и острой вершиной будем называть причинным конусом. Теорема 5 очевидным образом следует из такого утверждения.

Теорема 6. *Пусть некоммутативная алгебра Ли v имеет причинный конус. Тогда v есть $g_4\mathrm{III}_0$, или $g_4\mathrm{VII}$, или $g_4\mathrm{VIII}$.*

Доказательство теоремы 6 использует несколько представляющих самостоятельный интерес утверждений.

Утверждение 1. *Если некоммутативная алгерба Ли v является полупрямой суммой нильпотентного идеала n и абелевой подалгебры, причем центр $c(n)$ не содержит в $c(v)$, то в v нет причинного конуса.*

Доказательство. Допустим, что такой конус K существует. Берем $x \in c(n) \setminus c(v)$. Так как $\inf K \neq \phi$, то существует такой $y \in K$, что $\mathrm{ad}_x(y) \neq 0$. Тогда $e^{\mathrm{ad}\,\lambda x}(y) = y + \lambda \cdot \mathrm{ad}_x(y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, тем самым K содержит прямую с направляющим вектором $\mathrm{ad}_x(y)$.

Аналогично доказывается

Утверждение 2. *Если нильпотентная алгебра Ли имеет причинный конус, то она коммутативна.*

Оказывается, что причинные конусы в алгебрах $g_4\mathrm{III}_0$, $g_4\mathrm{VII}$ и $g_4\mathrm{VIII}$ определяются биинвариантной метрикой на соответствующих группах. Поэтому из теоремы вытекает

Следствие. *Биинвариантная метрика сигнатуры +2 (или −2) на некоммутативной группе Ли V существует, если V есть $G_4\mathrm{III}_0$, или $G_4\mathrm{VII}$, или $G_4\mathrm{VIII}$.*

5. Таким образом, теорема 5 утверждает, что пространство Минковского и пространства $G_4\mathrm{III}_0$, $G_4\mathrm{VII}$, $G_4\mathrm{VIII}$ обладают большей согласованностью причинных свойств с групповыми, чем другие упорядоченные четырехмерные группы Ли. Выделенность с этой точки зрения пространства Минковского в дальнейших комментариях не нуждается.

Группа $G_4\mathrm{VIII}$ есть универсальная накрывающая конформного пространства. А.Д. Александров в теореме 4 своей работы [11] установил, что геометрия этого пространства определяется его как локальной, так и глобальной причинной структурой. Введя на $G_4\mathrm{VIII}$ соответствующую биинвариантную метрику, мы получаем важную космологическую модель (см. [12]).

Вводя на $G_4\mathrm{III}_0$ биинвариантную метрику, задаваемую в базисе левоинвариантных векторных полей X_i, $i = 1, 2, 3, 4$ (базис взят из [9], с.73), коэффициентами $g_{14} = g_{41} = 1$, $g_{22} = g_{33} = -1$, остальные $g_{ij} = 0$, получаем пространство–время с подгруппой G_3II типа Бьянки, действующей на изотропной гиперповерхности. Так как изотропное векторное поле X_1 ковариантно постоянно, то это пространство–время относится к классу *pp*-волн (см. [13], с. 219).

Биинвариантную метрику на $G_4\mathrm{VII} = SL(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$ можно ввести как прямую сумму метрики Киллинга на $SL(2, \mathbf{R})$ и евклидовой метрики на $\mathbf{R}$; $SL(2, \mathbf{R})$ действует на времениподобной гиперповерхности.

Нам неизвестны работы, в которых отмечалась бы выделенность двух последних пространств.

Омский государственный университет
Куйбышевский государственный университет

Поступило
21 X 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Д.* В кн.: Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. М.: Наука, 1979. 2. *Гуц А.К.* – УМН, 1982, т. 37, вып. 2, с. 39–79. 3. *Александров А.Д.* – ДАН, 1974, т. 214, № 1, с. 11–14. 4. *Левичев А.В.* – Сиб. матем. журн., 1981, т. 22, № 5, с. 116–126. 5. *Александров А.Д.* Тр. МИАН, 1972, т. 123, с. 3–21. 6. *Busemann H.* – Dis. math., 1967, № 53, p. 5–50. 7. *Гуц А.К.* В сб.: Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Новосибирск, 1982. 8. *Gładysz S.* – Bull. Acad. Polon sci., ser. math., aster., phys., 1964, vol. 12, № 1, p. 1–14. 9. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 10. *Винберг Э.Б.* – Функц. анал. и его прилож., 1980, т. 14, вып. 1, с. 1–13. 11. *Александров А.Д.* – Вестн. ЛГУ. Матем., 1976, № 19, с. 5–28. 12. *Segal I.E., Jakobsen H.P., Ørsted B. et al.* – Proc. Math. Acad. Sci. USA, 1981, vol. 78, № 9, p. 5261–5265. 13. Точные решения уравнений Эйнштейна/Под ред. Э. Шмутцера. М.: Энергоиздат, 1982.

УДК 518:517.944/947 МАТЕМАТИКА

Е.Г. ДЬЯКОНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МЕТЕОРОЛОГИИ

(Представлено академиком Г.И. Марчуком 10 X 1983)

1. Одна из математических трудностей, встречающихся при численном решении задач метеорологии и гидродинамики, связана с линейным ограничением $\operatorname{div}\bar{u} + \alpha p = 0$, где число $\alpha \geqslant 0$ и либо равно нулю, либо очень мало. Для линейных задач с таким ограничением в [1] построены проекционно-сеточные методы (ПСМ) и итерационные процессы, приводящие к точности ϵ при затрате $W(\epsilon)$ арифметических действий с не улучшаемой по порядку асимптотикой $W(\epsilon)$. В настоящей работе показывается, что подобные результаты могут быть получены и для ряда нелинейных задач метеорологии и гидродинамики. Изложение ведется на примере двумерной задачи термогидродинамики турбулентной атмосферы, описывающей обтекание воздушным потоком горного хребта, в упрощениях теории конвекции для мезометеорологических процессов [2]. Эта задача связана с рассмотрением в области Ω (см. рис. 1) системы из 4 уравнений относительно вектора скорости $u_1 \equiv \{u_{1,1}, u_{1,2}\}^T$, температуры u_2 и давления u_3 с краевыми условиями Дирихле на границе Γ для u_1 и на $\Gamma\setminus\Gamma_1$ – для u_2; на $\Gamma_1 \equiv A_0A_1A_2A_3A_4$ для u_2 задано условие III рода. Точнее, пусть $W_2^1(\Omega) \equiv G_1$ и $\mathring{W}_2^1(\Omega) \equiv G_1^0$ – пространства С.Л. Соболева, G_Γ^0 образовано функциями из G_1.