Математические структуры и моделирование
2003, вып. 11, с. 88–96

УДК 519: 658.1(075)

ПЕРВИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ ОТНОШЕНИЙ КУЛАКОВА В МИКРОЭКОНОМИКЕ

М.А. Добренко, А.К. Гуц

In this article the Kulakov initial structures in microeconomics are considered. Early the Kulakov initial structures were applied to physics and sociology.

Общество – это социально-экономические отношения. Правильное описание структуры социальных и экономических отношений является и правильным описанием структуры общества. Из каких простейших структурных элементов, или «первоструктур», складываются социально-экономические отношения? Задавая такой вопрос, мы во главу угла ставим не простейшие элементы, скажем, крестьяне, рабочие, управленцы и т.д., образующие общество, а простейшие структуры, составляющие в конечном итоге структуры и организацию всего общества и его экономики.

Поиск «первоструктур» не в традиции западной науки. Тем не менее в 1970 году нобелевский лауреат И.Е.Тамм писал: «...более перспективно искать не исходную «первоматерию», а исходные «первоструктуры» – такая переформулировка проблемы единства мира представляется нам несравненно более преимущественной и в логическом, и в естественно-научном отношении...». Он усматривал при этом необходимость отказа от наглядных представлений: «...Проблема отказа от «наглядности» вставала перед человеческим интеллектом и раньше. Так, уже пифагорейская традиция осознавала необходимость перехода от пластического Эйдоса к чистому Логосу, однако «телесно-чувственная» природа греческой цивилизации помешала реализации этой программы – европейская наука в каком-то смысле унаследовала это бремя «наглядности», в несении которого есть своя прелесть» [1].

И.Е.Тамм высказал эту мысль в предисловии к книге своего ученика Ю.И.Кулакова, в которой «первоструктуры» были найдены для описания физики и геометрии. Однако идеи Ю.И.Кулакова актуальны и для социологии, и для экономики.

E-mail: mariadobrenko@yandex.ru, guts@univer.omsk.su
Омский государственный университет

1. Теория систем отношений Ю.И. Кулакова

В теории Ю.И. Кулакова постулируется наличие одного или нескольких множеств $\mathcal{M}, \mathcal{F}, ...$ элементов, между которыми определены отношения, обладающие двумя свойствами. Во-первых, некоторый набор этих отношений, выраженных в виде чисел, должен удовлетворять специальному уравнению, именуемому *законом*, и, во-вторых, в данном законе можно одни элементы заменять на другие по правилу, называемому *фундаментальной симметрией*.

В простейшем случае отношение – это вещественное число, сопоставляемое паре, тройке, четверке и т.д. элементов [1]. В качестве элементов могут выступать объекты любой природы: физические тела, индивиды социальной группы, мужчины и женщины, элементарные частицы и т.д., а в качестве отношений между элементами могут рассматриваться расстояния между телами (точками), родственные связи, отношения между полами, взаимодействия между частицами. Если ограничиваются одним множеством, то теория, которая строится, называется *унарной системой фундаментальных отношений*. В случае двух множеств соответствующая теория носит название *бинарная система фундаментальных отношений*. Мы будем использовать для систем фундаментальных отношений название системы Кулакова.

Каждая система отношений отличается от любой другой парой натуральных чисел (r, s), называемой рангом. Ю.И. Кулаков [1] и его ученик Г.Г. Михайличенко показали, что существует классификация систем отношений, и нашли соответствующие алгебраические формулы для всех рангов (r, s) (см. § 2.1).

Ю.И.Кулаков, Ю.С.Владимиров и их ученики, ограничивая свои исследования рамками физики, продемонстрировали, что каждая система бинарных отношений, описываемая очень простыми алгебраическими формулами, приводит после некоторых преобразований и выкладок к строго определенному физическому закону, например ко второму закону Ньютона, закону Ома или к той или иной геометрии (геометрии Евклида, геометрии Лобачевского и т.д.).

Успех теории систем отношений в физике заставляет подумать о возможности применения этой теории в социологии. Это имеет смысл сделать несмотря на то, что в XX веке существует предубеждение против перенесения методов естествознания на науки об обществе. Такое предубеждение удерживается, как правило, среди исследователей, которых называют узкими специалистами. Те же, кто более склонен к философским обобщениям, чаще пытаются увидеть за достижением в конкретной области знаний пути к получению новых результатов в других областях науки.

2. Формализация отношений

Рассмотрим два исходных абстрактных множества $\mathcal{M} = \{i, j, k, ...\}$ и $\mathcal{F} = \{\alpha, \beta, \gamma ...\}$. Отношение между этими множествами есть отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Если $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{F}$. Значения отношения между элементом i и элементом α представляется в виде формулы

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha). \tag{1}$$

Другими словами, отношение между любым i и любым α характеризуется вещественным числом $a_{i\alpha}$.

Будем предполагать, что отношение ϕ является *универсальным* в том смысле, что существуют два натуральных числа r и s, такие, что найдется отображение $\Phi : \mathbb{R}^{rs} \to \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: для любого произвольного набора из r элементов $i_1, ..., i_r \in \mathcal{M}$ и любого набора из s элементов $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_s} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_s} \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

Пара чисел (r, s) называется *рангом* рассматриваемой пары $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. В этом определении отчетливо видна постулируемая симметрия данного отношения: любой элемент $i \in \mathcal{M}$ может быть заменен на любой элемент из $\mathcal{M}$, так же как и элементы из множества $\mathcal{F}$. Но при этом элементы из $\mathcal{M}$ берут в количестве r, а из $\mathcal{F}$ – s.

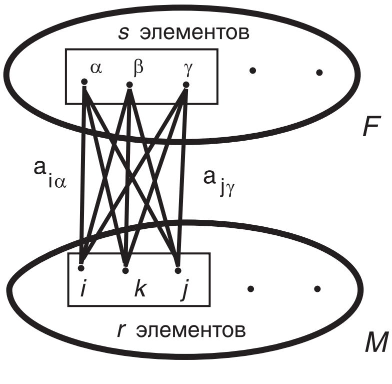

Рис. 1. Бинарная система отношений.

2.1. Классификация бинарных систем Кулакова

Для того чтобы найти классификацию бинарных систем отношений Кулакова, необходимо представить соотношение (1) в форме вещественной функции от двух вещественных переменных x_i и y_α. С точки зрения математики, это означает, что $\mathcal{M}, \mathcal{F}$ рассматриваются как (гладкие) многообразия размерности соответственно m и n и на них вводятся локальные координаты

$$\begin{cases} i \to \ x_i = (x_i^1, ..., x_i^m) \\ \alpha \to y_\alpha = (y_\alpha^1, ..., y_\alpha^n). \end{cases}$$

В этих координатах формула (1) принимает вид

$$a_{i\alpha} = \phi(x_i^1, ..., x_i^m, y_\alpha^1, ..., y_\alpha^n). \tag{3}$$

Выражение (3) подставляется в (2), и после достаточно кропотливых выкладок находится вид функций ϕ и Φ. Приведем итог этих исследований.

Классификация бинарных систем Кулакова. Если m размерность многообразия $\mathcal{M}$, а n размерность многообразия $\mathcal{F}$, то ранг (r, s) связан с ними соотношениями: $r = n + 1, s = m + 1$.

- Не существует системы Кулакова ранга $(1, 1)$.
- Существуют системы Кулакова только ранга (r, r), $r \geq 2$, $(r - 1, r)$, $r \geq 3$ и $(r + 1, r)$, $r \geq 2$.
- Существуют системы Кулакова ранга $(2, 4), (4, 2)$.
- Все диагональные системы отношений с рангом (r, r) могут быть двух типов. Их ранги обозначают как (r, r) и $(r, r; a)$. Для системы отношений ранга (r, r) закон в некоторых координатах записывается в виде

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_r} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

где отношения между элементами множеств $\mathcal{M}, \mathcal{F}$

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 2. \tag{5}$$

Системы отношений ранга $(r, r; a)$ характеризуются законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_r} \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

где отношения между элементами множеств $\mathcal{M}, \mathcal{F}$

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + y_\alpha^0, \quad r = 2;$$

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + y_\alpha^0 + \sum_{l=1}^{r-2} x_i^l y_\alpha^l, \quad r > 2. \tag{7}$$

- Для систем отношений ранга $(r+1,r)$, $r\geq 2$, имеем

$$\Phi=\begin{vmatrix} 1 & a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ 1 & a_{i_2\alpha_1} & \dots & a_{i_2\alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \\ 1 & a_{i_{r+1}\alpha_1} & \dots & a_{i_{r+1}\alpha_r} \end{vmatrix}=0 \qquad (8)$$

с отношением

$$a_{i\alpha}=y^0_\alpha+\sum_{l=1}^{r-1}x^l_i y^l_\alpha, \quad r\geq 2; \qquad (9).$$

для систем ранга $(r-1,r)$, $r\geq 3$,

$$\Phi=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i_{r-1}\alpha_1} & a_{i_{r-1}\alpha_2} & \dots & a_{i_{r-1}\alpha_r} \end{vmatrix}=0 \qquad (10)$$

с отношением

$$a_{i\alpha}=x^0_i+\sum_{l=1}^{r-2}x^l_i y^l_\alpha, \quad r\geq 3. \qquad (11)$$

- Для системы $(4,2)$ закон и отношения могут быть записаны в виде

$$\Phi=\begin{vmatrix} 1 & a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & (a_{i_1\alpha_1}a_{i_1\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_2\alpha_1} & a_{i_2\alpha_2} & (a_{i_2\alpha_1}a_{i_2\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_3\alpha_1} & a_{i_3\alpha_2} & (a_{i_3\alpha_1}a_{i_3\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_4\alpha_1} & a_{i_4\alpha_2} & (a_{i_4\alpha_1}a_{i_4\alpha_2}) \end{vmatrix}=0 \qquad (12)$$

и

$$a_{i\alpha}=\frac{x^1_i y^1_\alpha+y^2_\alpha}{x^1_i+y^3_\alpha}, \qquad (13)$$

а для системы $(2,4)$ –

$$\Phi=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & a_{i_1\alpha_3} & a_{i_1\alpha_4} \\ a_{i_2\alpha_1} & a_{i_2\alpha_2} & a_{i_2\alpha_3} & a_{i_2\alpha_4} \\ (a_{i_1\alpha_1}a_{i_2\alpha_1}) & (a_{i_1\alpha_2}a_{i_2\alpha_2}) & (a_{i_1\alpha_3}a_{i_2\alpha_3}) & (a_{i_1\alpha_4}a_{i_2\alpha_4}) \end{vmatrix}=$$

$$=0, \qquad (14)$$

и

$$a_{i\alpha}=\frac{x^1_i y^1_\alpha+x^2_i}{x^3_i+y^1_\alpha}. \qquad (15)$$

2.2. Эталоны системы отношений Кулакова

Запишем закон Φ для системы отношений ранга (r, s) в виде

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{k\beta}, ..., a_{j\gamma}) = 0. \tag{16}$$

Потребуем, чтобы уравнение (16) было разрешимо относительно любого из rs аргументов, т.е. чтобы его можно было всегда записать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, ..., a_{k\alpha}, a_{k\beta}, ...). \tag{17}$$

Выберем в множествах $\mathcal{M}, \mathcal{F}$ соответственно по $r-1$ и $s-1$ элементов и назовем их *эталонными*, или образующими базис системы фундаментальных отношений. Пусть это элементы $k, j, ...$ из множества $\mathcal{M}$ и $\beta, \gamma, ...$ из множества $\mathcal{F}$. Тогда для неэталонных элементов i и α формулу (17) можно переписать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, a_{i\gamma}...; a_{k\alpha}, a_{j\alpha}, ...; a_{k\beta}, a_{k\gamma}..., a_{j\beta}, a_{j\gamma}, ...), \tag{4.18}$$

где в первой группе аргументов находятся бинарные отношения элемента i со всеми $s-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{F}$, во второй группе выделены бинарные отношения элемента α со всеми $r-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{M}$. Наконец, в третьей группе сосредоточены бинарные отношения эталонных элементов друг с другом. Введем обозначения

$$x_i^1 = a_{i\beta}, x_i^2 = a_{i\gamma}, ..., x_i^{s-1} = \cdot,$$

$$y_\alpha^1 = a_{k\alpha}, y_\alpha^2 = a_{j\alpha}, ..., y_\alpha^{r-1} = \cdot.$$

Другими словами, мы вводим *координаты* для неэталонных элементов i, α относительно зафиксированного базиса эталонных элементов в множестве $\mathcal{M} \times \mathcal{F}$. Считая отношения между эталонными постоянными (известными) для данного базиса, перепишем формулу (18) в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(x_i^1, ..., x_i^{s-1}, y_\alpha^1, ..., y_\alpha^{r-1}). \tag{19}$$

Таким образом, бинарное отношение между любыми элементами i, α является функцией, определенной в некоторой области D *координатного* пространства $\mathbb{R}^{r+s-2}$. Числа $m = s - 1$ и $n = r - 1$ – это размерности соответственно «многообразий» $\mathcal{M}$ и $\mathcal{F}$.

2.3. Первичные структуры гендерной социологии и психологии межличностных взаимодействий

В книге [3] было продемонстрировано, как первоструктуры Кулакова описывают гендерные отношения и межличностные взаимодействия индивидов. Многие формулы социометрики и психометрики являются иным выражением формул, полученных в классификации систем отношений Кулакова.

3. Первичные структуры микроэкономики

Покажем, как теория Ю.И.Кулакова может быть применена к описанию микроэкономических отношений.

3.1. Выручка предприятия

Предположим, что имеется некоторое множество $\mathcal{M} = \{i, j, k, ...\}$ предприятий-производителей некоторого товара и множество $\mathcal{F} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ групп покупателей этого товара. Группа покупателей – это локализованная группа покупателей, т.е. население деревни, поселка, микрорайона, города.

Отношение «производитель-группа покупателей» – это отображение ϕ : $\mathcal{M} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Мы примем, что это микроэкономическое отношение является структурой Кулакова рода $(2, 2)$. В таком случае

$$\begin{cases} i \to \ x_i^1 \\ \alpha \to y_\alpha^1, \end{cases}$$

и в силу (5)

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^1 y_\alpha^1. \tag{20}$$

Если принять, что x_i^1 – это цена на товар i–о производителя, а y_α^1 – количество (в потенциале) товара, приобретаемого α-й группой покупателей, то формула (20) есть не что иное, как выручка i–о предприятия от продажи своего товара α-й группе покупателей.

Универсальность данной первоструктуры состоит в предположении, что пары производителей и пары групп покупателей могут заменяться на любые другие аналогичные пары. Выделение пары производителей, по существу, представляет требование отсутствия монополии какого-либо производителя на товарном рынке. Пара групп покупателей – это отсутствие на рынке диктата одной группы покупателей (монопсония).

Таким образом, микроэкономическая структура Кулакова ранга $(2, 2)$ описывает формулу выручки предприятия-производителя, работающего в условиях идеального рынка.

3.2. Потенциальная потребность в товаре

Рассмотрим теперь структуру Кулакова ранга $(3, 3)$. Для нее

$$\begin{cases} i \to \ x_i = (x_i^0, x_i^1) \\ \alpha \to y_\alpha = (y_\alpha^0, y_\alpha^1), \end{cases}$$

и в силу (7)

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^0 + y_i^0 + x_i^1 y_\alpha^1. \tag{21}$$

Теперь мы примем, что $x_i^0 = (r_t)_i$ – объем товаров, требующих замены (потребленных или отслуживших свой срок); $x_i^1 = (b_t)_i$ – среднее количество товара, приобретаемое одним покупателем в период t; $y^0_\alpha = (l_t)_\alpha$, есть изменение потребности (потенциального спроса) на товар за счет воздействия различных факторов (рекламы, появления новых товаров-субститутов, социально-экономической политики и др.); $y^1_i = (m_t)_\alpha$ – изменение количества покупателей в группе α.

В таком случае формула (21) примет вид

$$a_{i\alpha} = \phi(i,\alpha) = (r_t)_i + (l_t)_\alpha + (b_t)_i(m_t)_\alpha, \tag{22}$$

и описывает она потенциальную потребность в товаре в период t. Данная формула известна в микроэкономике [2, с.57].

Теперь, говоря об универсальности данной первоструктуры, мы должны представлять себе, что речь идет о более сложной симметрии троек производителей и троек групп покупателей, означающей более развитую систему конкуренции, антимонополии и антиолигополии.

Производитель i характеризуется парой чисел $((r_t)_i, (b_t)_i)$. Экономический смысл этих данных оговаривался выше. Очевидно, что подобные экономические показатели обязано иметь серьезное предприятие-производитель для того, чтобы успешно продавать свой товар.

Группа покупателей α характеризуется парой чисел $((l_t)_\alpha, (m_t)_\alpha))$. Очевидно, что речь идет о большом количестве групп покупателей, т.к. деятельность предприятий-производителей, описанных в данной структуре, для того чтобы быть успешной, должна быть направлена на большое количество групп покупателей.

3.3. Финансировавание предприятия с помощью заемного капитала

Рассмотрим теперь структуру Кулакова ранга $(4,2)$. Имеем

$$\begin{cases} i \to \ x_i = x^1_i \\ \alpha \to y_\alpha = (y^1_\alpha, y^2_\alpha, y^3_\alpha) \end{cases}$$

и в сиду (4.7)

$$a_{i\alpha} = \frac{x^1_i y^1_\alpha + y^2_\alpha}{x^1_i + y^3_\alpha}. \tag{23}$$

Осталось обнаружить эту структуру в экономике. Известно, однако, что фирма-заемщик при кредитном финансировании получает особое преимущество, которое называется «левиридж-эффект», или действие финансового рычага.

Исходным пунктом действия эффекта является процентная ставка за кредит I и общая рентабельность капитала активов R_A, вычисляемая по формуле

$$R_A = \frac{\text{П} + I \cdot \text{ЗС}}{CC + \text{ЗС}}, \tag{24}$$

где П – прибыль за рассматриваемый период, CC, ЗС – соответственно собственные и заемные средства (капитал) за тот же период [2, с.340].

Положим

$$a_{i\alpha} = R_A,\ x_i^1 = \text{ЗС},\ \ y_\alpha^1 = I,\ y_\alpha^2 = \Pi,\ y_\alpha^3 = CC.$$

Тогда формулы (24), (23) преобразуются одна в другу.

Таким образом, кредитор i характеризуется числом ЗС, т.е. предоставляемым кредитом, а предприятие (фирма-заемщик) α – числами (I, Π, CC). То, что ставка за кредит I является характеристикой предприятия, а не кредитора, объясняется тем, что от самой фирмы зависит, берет ли она кредит на предложенных условиях, или не берет.

Обратим внимание на естественность фундаментальной симметрии в данном случае. Она требует инвариантности отношения (23) между кредиторами и предприятиями относительно замены пар кредиторов и четверок предприятий. Наличие двух кредиторов дает возможность выбора для предприятия (у кого брать, на каких условиях), а существование четырех фирм-заемщиков обеспечивает само существование кредита как формы бизнеса.

Как видим, все структуры Кулакова присутствуют в микроэкономике.

4. Заключение

Какой смысл в том, что структуры Кулакова проявляют себя в физике, социологии, психологии и экономике, т.е. во многих значимых разделах знаний человека? Об этом исчерпывающе сказал И.Е.Тамм, слова которого приведены в начале статьи. Говоря же на менее строгом языке, можно сказать, что Конструктор, создавая мир, в его основу заложил не атомы или элементарные частицы, а первичные структуры – эталоны, по которым строится абсолютно все, что есть в этом мире. Иначе говоря, все состоит не из атомов, а из первоструктур.

Литература

1. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. *Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику.* М.: Архимед, 1992.
2. Кузин Б., Юрьев В., Шахдинаров Г. *Методы и модели управления фирмой.* СПб.: Питер, 2001.
3. Гуц А.К., Лаптев А.А., Коробицын В.В., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. *Математические модели социальных систем: Учебное пособие.* Омск: ОмГУ, 2000. 256 с.