Математические структуры и моделирование
2002, вып. 9, с. 1–5

УДК 519.715

СИММЕТРИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, НЕ ВЫВОДЯЩЕЕ ДИНАМИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ ЗА ПРЕДЕЛЫ КОНУСА

А.К. Гуц

We study a control dinamic system in $\mathbb{R}^3$ that is symmetric with respect to Lie group G which acts simple transitivelly and affinely in $\mathbb{R}^3$ and linear with respect to control parameters. The purpose is discription of all convex cones in which lies the system trajectory.

Введение

Пусть дана задача оптимального управления

$$\int\limits_0^T s(x,u)dt \to inf$$

при условии, что

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ x(0) = a, \\ x(T) = b \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r. \end{cases} \tag{1}$$

В случае, когда функции s, f линейны относительно u, т.е. $s(x,u) = S(x) + Au + a, f(x,u) = F(x) + Bu + b$, и множество U является выпуклым многогранником (или выпуклым компактом), то эта задача сводится к следующей [1–3]:

$$J[x(\cdot)] = \int\limits_{x(\cdot)} \omega \to inf \tag{2}$$

при условии, что

$$\dot{x} \in K_{x(t)}, \quad t \in [0,1], \tag{3}$$

$$x(0) = a, \quad x(1) = b, \tag{4}$$

где ω – дифференциальная 1-форма на n-мерном гладком многообразии $X \approx \mathbb{R}^n$, K_x выпуклый конус в каждой точке $x \in X$ и лежащий в касательном пространстве T_xX.

Таким образом, управление $u \in U$ в виде (1) сводится к управлению в форме задания семейства выпуклых конусов $\mathcal{K} = \{K_x \subset T_xX : x \in X\}$.

E-mail: guts@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 01-01-00303).

1. Симметричное управление

Группа Ли G действует на многообразии X, если каждому $g \in G$ соответствует диффеоморфизм $\alpha(g) : X \to X$ такой, что произведению gh отвечает композиция $\alpha(g) \circ \alpha(h)$ диффеоморфизмов, а единице $e \in G$ – тождественное отображение $id_X : X \to X$. Иначе говоря, действие G на X – это гомоморфизм $\alpha : G \to Diff(X)$.

Определение 1. Управление динамической системой (2)–(4) называется *симметричным* относительно действия группы G, если для любого $g \in G$

$$d\alpha(g)_x[K_x] = K_{[\alpha(g)](x)} \tag{5}$$

и

$$\alpha^*(g)[\omega_{[\alpha(g)](x)}] = \omega_x. \tag{6}$$

Здесь $d\alpha(g)_x$ – дифференциал диффеоморфизма $\alpha(g)$ в точке $x \in X$, а $\alpha^*(g)_x : T^*_{[\alpha(g)](x)}X \to T^*_x X$ соответствующий кодифференциал.

2. Упорядоченное симметричное управление

Пусть X и семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{P_x \subset X : x \in X\}$ задает порядок в X, т.е. выполняются условия:

1) $x \in P_x$;
2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$;
3) если $y \neq x$, то $P_y \neq P_x$.

Мы будем предполагать далее, что $X = \mathbb{R}^n$ и группа Ли G действует просто транзитивно на X. Зафиксируем точку $a \in X$. Тогда имеем диффеоморфизм

$$\varphi : G \cong \mathbb{R}^n, \tag{7}$$
$$\varphi(g) = [\alpha(g)](a), \quad \varphi(e) = [\alpha(e)](a) = a.$$

Определение 2. Порядок $\mathcal{P}$ инвариантен относительно действия группы G (G-инвариантный порядок), если для любой точки $x \in X$ и любого $g \in G$

$$\alpha(g)[P_x] = P_{[\alpha(g)](x)}. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что если $\mathcal{P}$ G-инвариантный порядок на X, то $S = \varphi^{-1}(P_a)$ – подполугруппа группы G.

Касательный объект к S – это множество вида $L(S) = \{\xi \in \mathfrak{g} : \xi = \lim\limits_{n\to\infty} n\xi_n, \exp \xi_n \in S\}$, где $\mathfrak{g}$ алгебра Ли группы Ли G.

Контингенция множества P_x в точке x – это совокупность векторов, касательных в точке x к гладким кривым, исходящим из точки x и лежащим в P_x. Для контингенции используем обозначение: $cont(\mathcal{P}, x)$. Известно, что $K_x = cont(\mathcal{P}, x)$ – замкнутый выпуклый конус, лежащий в $T_x X$.

Ясно,

$$d\varphi_e[L(S)] = K_a \ \text{ и } \ d\varphi_g[d(l_g)_e[L(S)]] = d\alpha(g)_a[K_a] = K_x, \tag{9}$$
$$x = \alpha(g)(a),$$

где $l_g : G \to G$ левый сдвиг на g.

Предложение 1. *Пусть подполугруппа S порождает G. Тогда $L(S) = \{\xi \in \mathfrak{g} : \exp(\mathbb{R}^+)\xi \subset \overline{S}\}$, т.е. $\exp[L(S)] \subset \overline{S}$.* ■

Мы можем использовать семейство $\mathcal{K}(\mathcal{P}) = \{K_x : x \in X\}, K_x = cont(\mathcal{P}, x)$ в качестве управления для динамической системы (3)–(4).

Определение 2. Управление $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ называется *упорядоченным*, если $\mathcal{P}$ задает порядок на X.

Предложение 2. *Если порядок $\mathcal{P}$ инвариантен относительно группы G, то очевидно, что $\mathcal{K}(\mathcal{P})$-управляемая система симметрична относительно действия группы G.*

Доказательство. Это очевидно, поскольку из (9) вытекает (5). ■

Предложение 3. *Если порядок $\mathcal{P}, P_a \neq \emptyset$, инвариантен относительно группы G, то $\mathcal{K}(\mathcal{P})$-управляемая система* (3)–(4) *не выходит за пределы множества $\overline{P_a}$.*

Доказательство. Следует из условия 2) в определении порядка, определения контингенции, формул (9) и предложения 1. ■

3. Упорядоченное аффинное управление

Пусть действие группы Ли G на $X = \mathbb{R}^3$ является *аффинным*, т.е. $\alpha : G \to Aff(R^3)$. Просто транзитивное аффинное действие α порождает полную левоинвариантную аффинную структуру $\mathcal{A}$ на самой группе Ли G. Действительно, диффеоморфизм

$$\begin{gathered}\phi : G \cong \mathbb{R}^3, \quad \varphi(g) = [\alpha(g)](0,0,0) = (x^1, x^2, x^3) = x \in \mathbb{R}^3, \\ \phi(e) = a = (0,0,0)\end{gathered} \tag{10}$$

можно использовать для задания глобальной аффинной системы координат на G, в которых левые сдвиги $l_h : G \to G,\ l_h(g) = hg$ имеет вид

$$[l_h]^k(g) = [l_h]^k(\phi^{-1}(x^1, x^2, x^3)) = \sum_{i=1}^{3} L_i^k x^i + L^i \quad (k = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Предположим, что порядок $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^3$ является *коническим*, т.е. состоит из замкнутых выпуклых конусов. Тогда можно отождествить $P_x = K_x$.

Предложение 4. *Если порядок $\mathcal{P}$ инвариантен относительно просто транзитивного аффинного действия группы Ли G, то $\mathcal{K}(\mathcal{P})$-управляемая система* (3)–(4) *не выходит за пределы конуса K_a.* ■

Поставим задачу описать все конусы K_a в $\mathbb{R}^3$, за которые не выходит $\mathcal{K}(\mathcal{P})$-управляемая система, эволюционирующая в $\mathbb{R}^3$. Данная задача сводится к задаче классификации и описания всех G-инвариантных конических порядков в пространстве $\mathbb{R}^3$ относительно разрешимых[1] односвязных 3-мерных групп Ли, действующих аффинно и просто транзитивно на $\mathbb{R}^3$. Такое описание содержится в работе [5], а краткая формулировка результата приводится в следующей теореме 1.

Теорема 1. *Если G_3 не является группой Гейзенберга, тогда G_3 допускает левоинвариантный эллиптический конический порядок относительно полной левоинвариантной аффинной структуры $\mathcal{A}$, содержащей канонические координаты 2-го рода. Следовательно, $X = \mathbb{R}^3$ допускает G_3-инвариантный эллиптический конический порядок. При этом аффинное просто транзитивное действие α, соответствующее аффинной структуре $\mathcal{A}$, является нормальным*[2] *и строится на основе метода Ямагучи* [6]. ■

4. Упорядоченное однородное аффинное управление

Если потребовать, чтобы упорядоченное аффинное управление было не только симметричным, но и *однородным*, т.е. либо внутри (Int-однородность), либо на границе, за исключением вершины (∂-однородность) конуса K_a, либо вне $K_a \cup K_a^-$ (ext-однородность) [3] действовала транзитивно аффинная группа $Aut(\mathcal{P})_a \subset Aff(\mathbb{R}^3)$, состоящая из порядковых автоморфизмов[4], то необходимо найти описание всех *однородных аффинных причинных порядков* на 3-мерных разрешимых группах Ли. Эта задача решена в статье [8] следующим образом.

Пусть $\mathcal{A}_\gamma$ – полная левоинвариантная аффинная структура на разрешимой группе Ли G_3, которая вводится с помощью метода С.П.Гаврилова [7]. Эта структура определяет естественное просто транзитивное аффинное действие α_γ в $\mathbb{R}^3$. В статье [7] С.П.Гаврилов описывает $\alpha_\gamma(G_3)$-инвариантные лоренцевы метрики в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – такая метрика. Конус $P_x \subset \mathbb{R}^3$ назовем *причинным*, если луч из P_x исходит в направлении ξ, лежащем в фиксированной половине касательного конуса $K_x = \{\zeta : \langle\zeta,\zeta\rangle_x \geq 0\}$. Порядок $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^3$ называется *аффинно причинным*, если он состоит из множества эллиптических причинных конусов $\{P_x : x \in \mathbb{R}^3\}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{P}$ аффинно причинный порядок относительно аффинной структуры Гаврилова $\mathcal{A}_\gamma$. Тогда для связных односвязных разрешимых групп Ли G_3 типа I, VI_0, VII_0 класса I (см.* [7]*) порядок $\mathcal{P}$ является одновременно $Int-$, $\partial-$ и $ext-$однородными. Соответствующие лоренцевы метрики плоские. Для остальных типов групп Ли порядок $\mathcal{P}$ не является однородным ни в одном из указанных выше смыслах.*

Доказательство. Дано в статье [8]. ■

---

[1] Разрешимость есть следствие диффеоморфности (7).

[2] Просто транзитивное аффинное действие α на $\mathbb{R}^3$ и соответствующая аффинная структура на G_3 называются нормальными, если $\alpha(g)$ – параллельный перенос для любого $g \in T$, где T – максимальная абелева нормальная подгруппа группы G_3.

[3] Здесь K_a^- – конус центрально симметричный K_a относительно точки a.

[4] Аффинное преобразование $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ является порядковым автоморфизмом, если $A(P_x) = P_{A(x)}$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^3$.

Литература

1. Зеликин М.И. *Синтез оптимальных траекторий на пространствах представлений групп Ли* // Мат. сб. 1987. Т.132. С.541–555.
2. Зеликин М.И. *Необходимые условия для оптимальности особых траекторий в линейной задаче управления* // Некоторые вопросы современного анализа / Ред. В.М.Тихомиров. МГУ, мехмат, 1984. С.35–41.
3. Zelikin M.I. *Totally extremal manifolds for optimal control problems* // Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis (ed. K.H.Hofmann, J.D.Lawson, E.B.Vinberg). De Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin, 1995. 368 pp. P.339–354.
4. Винберг Э.Б. *Инвариантные конусы и упорядочивание в группах Ли* // Функ. анализ и прилож. 1980. Т.14. С.1–13.
5. Абдрахимова Н.Р., Гуц А.К., Грибанова И.А. *Описание аффинных конических порядков на трехмерных разрешимых группах Ли* // Ученый совет мат. фак. ОмГУ. Деп. в ВИНИТИ 15.06.94, N 1467–В94. 35 с.
6. Yamaguchi S. *On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups.* // Mem. Fac. Sci. Kyuchi Univ. 1979. Ser.A33. P.209–218.
7. Гаврилов С.П. *Левоинвариантные метрики на разрешимых односвязных 3-мерных группах Ли* // Теория относительности и гравитация (Казань). 1985. Вып.22. С.31–64.
8. Гуц А.К., Ермакова Е.В. *Однородные аффинные причинные порядки на трехмерных разрешимых группах Ли* // Ученый совет мат. фак. ОмГУ. Деп. в ВИНИТИ 05.07.93, N 1841–В93. 42 с.