Математические структуры и моделирование
2001, вып. 8, с. 76–90

УДК 530.12:531.51

ТЕОРЕТИКО-ТОПОСНАЯ МОДЕЛЬ МУЛЬТИВЕРСА ДОЙЧА

А.К. Гуц

The Deutsch multiverse is collection of parallel universes. In this article a formal theory of the Deutsch multiverse and a topos-theoretic model of multiverse are given. For this the Lawvere-Kock Synthetic Differential Geometry and models for smooth infinitesimal analysis are used.

Введение

В книге Дэвида Дойча [1] излагается эскиз структуры физической реальности, которая представляет собой совокупность взаимодействующих параллельных вселенных, называемой *мультиверсом*, правильное описание которого, как считает Дойч, возможно лишь в рамках квантовой теории.

Наша цель – оставаясь в рамках математического аппарата 4-мерной общей теории относительности, описывающей Вселенную как конкретное 4-мерное лоренцево многообразие $\langle R^4,\ g^{(4)}\rangle$, называемое *пространством-временем*, предоставить возможность учитывать наличие параллельных, т.е. других вселенных, являющихся самыми различными 4-мерными псевдоримановыми многообразиями, за счет любого необходимого произвольного увеличения размерности особого Гиперпространства, объемлющего все вселенные. Более того, Гиперпространств должно быть сколь угодно много; геометрия, топология, размерность Гиперпространств должны быть сколь угодно различными, чтобы всегда можно было найти бесчисленное число вселенных, сколь угодно подобных нашей, и одновременно должно существовать сколь угодно много вселенных, совершенно непохожих на мир, в котором мы живем.

Структура физической реальности должна учитывать прихоть мыслящего существа видеть ее во всевозможных мыслимых формах, располагая при этом весьма скудным исследовательским инструментарием, основой которого должны быть теория относительности и квантовая механика.

Следут особо подчеркнуть, что мы не намерены переходить к многомерным теориям типа Калуцы-Клейна. Нет, ни в коем случае. Подчеркиваем, что основой теории мультиверса должна быть 4-мерная метрика $g^{(4)}$.

E-mail: guts@univer.omsk.su

Омский государственный университет

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00303 – теоретическая часть).

Нетрудно понять, что поставленная нами цель требует иного взгляда на общую теорию относительности, поскольку мы собираемся совместить несовместимые вещи. Тем не менее, выход находится при обращении к интуиционистскому взгляду на риманову геометрию. Отказываясь от закона исключенного третьего, можно построить теорию, включающую как классический вариант общей теории относительности, так и множество других ее многомерных обобщений.

1. Формальная теория мультиверса

Теорию мультиверса следует строить как формальную теорию $\mathcal{T}$, максимально похожую на общую теорию относительности, т.е. как теорию одной 4-мерной вселенной, а параллельные вселенные должны появиться при построении моделей формальной теории.

Основой формальной теории $\mathcal{T}$ может послужить так называемая Синтетическая дифференциальная геометрия (СДГ) Ловера-Кока [2]. Как известно, из-за того, что принимаемая СДГ аксиома Кока-Ловера несовместима с законом исключенного третьего, нельзя построить модель этой теории в категории теории множеств Кантора **Set**.

Отказ от закона исключенного третьего приводит нас к интуиционистской логике, которой мы должны придерживаться при развитии теории мультиверса, опираясь на СДГ. Место теоретико-множественных моделей формальной теории мультиверса должны занять теоретико-топосные модели. Последние хотя и обладают, в общем случае, внутренней интуиционистской логикой, развиваются в рамках двузначной классической логики. Это позволяет математику иметь дело с привычными объектами, правда, в рамках очень сложных конструкций, каковыми являются топосы.

Основным для СДГ Кока-Ловера является замена поля действительных чисел $\mathbb{R}$ на коммутативное кольцо R. В идеале хотелось бы, чтобы оно удовлетворяло следующим аксиомам [1]:

(A1) $\langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ – коммутативное кольцо.

(A2) R локальное кольцо, т.е.

$$\begin{gathered}0 = 1 \Longrightarrow \perp \\ \exists y\ (x \cdot y = 1) \exists y\ (1 - x) \cdot y = 1.\end{gathered}$$

(A3) $\langle R, <\rangle$ – действительное упорядоченное локальное кольцо, т.е. $<$ – транзитивное отношение, совместимое с кольцевой структурой в том смысле, что

$$\begin{gathered}(a)\ 0 < 1,\ (0 < x\ \&\ 0 < y \Longrightarrow 0 < x + y\ \&\ 0 < x \cdot y), \\ (b)\ \exists y (x \cdot y = 1) \Longleftrightarrow (0 < x \vee x < 0), \\ (c)\ 0 < x \Longrightarrow \exists y (x = y^2)\ \text{(евклидовость)}.\end{gathered}$$

[1] Мы приводим только часть аксиом. Другие аксиомы см. в [7, Гл.VII].

(A4) $\leq$ – предпорядок, совместимый с кольцевой структурой, т.е. рефлексивное и транзитивное отношение, и

$$(a)\ 0 \leq 1,\ (0 \leq x\ \&\ 0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq x + y\ \&\ 0 \leq x \cdot y),\ 0 \leq x^2,$$
$$(b)\ (x - \text{нильпотент, т.е. } x^n = 0) \Longrightarrow 0 \leq x.$$

(A5) $<$ и $\leq$ – совместимы, т.е.

$$(a)\ x < y \Longrightarrow x \leq y,$$
$$(b)\ x < y\ \&\ y \leq x \Longrightarrow \perp.$$

(A6) (Аксиома Кока-Ловера). Для любого

$$\forall (f \in R^D) \exists ! (a, b) \in R \times R \forall d \in D (f(d) = a + b \cdot d),$$

где $D = \{x \in R : x^2 = 0\}$.

Как показано в [2], аксиома (A6) несовместима с законом исключенного третьего.

(A7) (Аксиома интеграла).

$$\forall f \in R^{[0.1]} \exists ! g \in R^{[0.1]} (g(0) = 0\ \&\ \forall x \in [0,1]\ (g'(x) = f(x)),$$

где $[0,1] = \{x \in R : 0 \leq x\ \&\ x \leq 1\}$ и $g'(x)$ – это единственное b такое, что $\forall d \in D(g(x + d) = g(x) + b \cdot d)$.

Используется символическая запись

$$g(x) = \int_0^1 f(t)dt.$$

(A8) $\forall x \in [0,1]\ 0 < f(x) \Longrightarrow 0 < \displaystyle\int_0^1 f(x)dx.$

(A8′) $\forall x \in [0,1]\ 0 \leq f(x) \Longrightarrow 0 \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)dx.$

(A9) (Существование обратной функции).

$$\forall f \in R^R\ \forall x \in R\ \ (f'(x) - \text{обратимо} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \exists \text{ открытые } U, V (x \in U\ \&\ f(x) \in V\ \&\ f|_U : U \to V - \text{биекция})).$$

(A10) $N \subset R$, т.е. $\forall x \in N\ \exists y \in R(x = y)$.

(A11) R – архимедово, т.е. $\forall x \in R\ \exists n \in N (x < n)$.

(A12) (Аксиомы Пеано).

$$\begin{aligned}
&0 \in N \\
&\forall x \in R\ (x \in N \Longrightarrow x + 1 \in N) \\
&\forall x \in R\ (x \in N\ \&\ x + 1 = 0 \Longrightarrow \perp).
\end{aligned}$$

Кольцо R дополнительно к обычным действительным числам из $\mathbb{R}$ располагает элементами, называемыми *инфинитезималами* и входящими в «множества»

$$D = \{d \in R : d^2 = 0\}, ..., D_k = \{d \in R : d^{k+1} = 0\}, ...,$$

$$\mathbb{\Delta} = \{x \in R : f(x) = 0,\ f \in m_0^g\},$$

где $m_{\{0\}}^g$ – идеал функций, имеющих нулевой росток в 0 [2], причем

$$D \subset D_2 \subset ... \subset D_k \subset ... \subset \mathbb{\Delta}.$$

В рамках изложенной аксиоматики можно построить [3,4] риманову геометрию для 4-мерных (формальных) многообразий $\langle R^4, g^{(4)} \rangle$, являющуюся основой для эйнштейновской теории гравитации.

Мы постулируем, что *мультиверс – это 4-мерное пространство-время, описываемое с помощью СДГ, т.е. является формальным лоренцевым многообразием $\langle R^4, g^{(4)} \rangle$, для которого выполняются уравнения Эйнштейна, представленные в традиционном виде*:

$$R_{ik}^{(4)} - \frac{1}{2} g_{ik}^{(4)} (R^{(4)} - 2\Lambda) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \tag{1}$$

Решением этих уравнений будет 4-метрика $g^{(4)}$.

На формальном уровне физические следствия таких предположений не так заметны, как математические. Поэтому необходимо обратиться к моделям формальной теории. Наиболее исследованными являются так называемые хорошо адаптированные модели вида $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$, содержащие как полную подкатегорию категорию гладких многообразий $\mathcal{M}$.

2. Гладкие топосные модели мультиверса

Пусть $\mathbb{L}$ – это дуальная категория для категории конечно порожденных C^∞-колец. Она называется *категорией локусов* [7]. Объектами категории $\mathbb{L}$ являются все те же конечно порожденные C^∞-кольца, а морфизмами – обращенные морфизмы категории конечно порожденных C^∞-колец. Принято во избежание путаницы объекты (локусы) категории $\mathbb{L}$ обозначать как ℓA, где A – C^∞-кольцо. Следовательно, $\mathbb{L}$-морфизм $\ell A \to \ell B$ – это C^∞-гомоморфизм $B \to A$.

[2] Иначе говоря, исчезающих в некоторой окрестности точки 0.

Конечно порожденное C^∞-кольцо ℓA изоморфно кольцу вида $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ (для некоторого натурально числа n и некоторого конечно порожденного идеала I).

Категория $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$ является топосом. Мы рассмотрим топос $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$ как модель формальной теории мультиверса. Важно отметить, что модель $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$ обладает патологическими свойствами: многие из аксиом (A1)-(A12) не выполняются в $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$. Например, оказывается, что *гладкая прямая* R, будучи коммутативным кольцом с единицей 1, не является при этом даже локальным кольцом, т.е. нарушается аксиома (A2). Более того, R не обладает свойством архимедовости (аксиома (A11)).

Можно рассматривать в качестве моделей топосы $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и $\mathcal{Z}$ и многие другие [7, Appendix 2]. Для них выполнены все аксиомы (A1)-(A12) (см. [7, с.300]). Однако работа с топосом $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$ позволяет быстрее ознакомиться с излагаемой теорией мультиверса, не усложняя изложение математическими конструкциями.

На языке Дойча переход к конкретной модели формальной теории – это порождение *виртуальной реальности* [3]. Физическая реальность, воспринимаемая нами и названнная Дойчем *мультиверсом* [4], также является виртуальной реальностью, созданной нашим мозгом [1, с.140]. Более того, «виртуальная реальность, основанная на неправильных законах, и *есть* наш единственный источник получения знаний! ... А поскольку наши концепции и теории (будь они врожденные или приобретенные) никогда не совершенны, все наши передачи на самом деле неточны. То есть, они дают нам ощущение среды, которая значительно отличается от среды, в которой мы действительно находимся» [1, с.140].

Модель мультиверса – это *генератор виртуальной реальности*, который обладает определенным *репертуаром сред*, которые он создает и в которые мы погружаемся. Поясним, как это происходит.

При интерпретации $i : \mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}} \models \mathcal{T}$ формальной теории $\mathcal{T}$ мультиверса в топосе $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{\mathbf{op}}}$ объектам теории, например кольцу R, степени R^R и т.д., ставятся в соответствие объекты топоса, т.е. функторы $F = i(R)$, $F^F = i(R^R)$ и т.д. Отображениям, например $R \to R$, $R \to R^R$, – морфизмы топоса $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$, т.е. естественные преобразования функторов – $F \to F$, $F \to F^F$.

Наконец, при интерпретации языка формальной теории мультиверса необходимо приписать элементам кольца R «элементы» функторов $F \in \mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$. Иначе говоря, нужно проинтерпретировать отношение $r \in R$. Это сделать не так просто потому, что функтор F определен на категории локусов $\mathbb{L}$; его переменной (аргументом) является произвольный локус ℓA, а значением множество $F(\ell A) \in \mathbf{Set}$. Выход из затруднения заключается в определении *обобщенных элементов* $x \in_{\ell A} F$ функтора F.

Обобщенным элементом $x \in_{\ell A} F$, или *элементом x функтора F в стадии ℓA*, называется элемент $x \in F(\ell A)$.

[3]Это предположение автор услышал от А.А.Звягинцева.

[4]Multiverse – много (multi-) вселенных (universe); причем universe – одна (uni) вселенная. Другой не мыслили, и это отразилось в языке.

Теперь можно сопоставить элементу $r \in R$ обобщенный элемент $i(r) \in_{\ell A} F$. Но, как видим, таких элементов столько сколько локусов. При переходе к модели $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$ происходит «размножение» элемента r. Он начинает существовать в бесконечном числе вариантов $\{i(r) : i(r) \in_{\ell A} F, \ell A \in \mathbb{L}\}$.

Важно отметить, что поскольку 4-метрика $g^{(4)}$ – это элемент объекта $R^{R^4 \times R^4}$, то «интуиционистская» 4-метрика начинает существовать в бесконечном числе классических вариантов $i(g)^{(4)} \in_{\ell A} i(R^{R^4 \times R^4})$. Обозначим каждый такой вариант как $i(g)^{(4)}(\ell A)$.

Для упрощения изложения будем далее иметь дело с объектами модели $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$. Другими словами, будем писать $g^{(4)}(\ell A)$ вместо $i(g)^{(4)}(\ell A)$.

Нетрудно понять, что каждый вариант $g^{(4)}(\ell A)$ классической 4-метрики удовлетворяет «своему» уравнению Эйнштейна [4]

$$R^{(4)}_{ik}(\ell A) - \frac{1}{2} g^{(4)}_{ik}(\ell A)[R^{(4)}(\ell A) - 2\Lambda(\ell A)] = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}(\ell A). \tag{2}$$

Причем не исключено, что физические константы G, c также могут меняться от варианта к варианту.

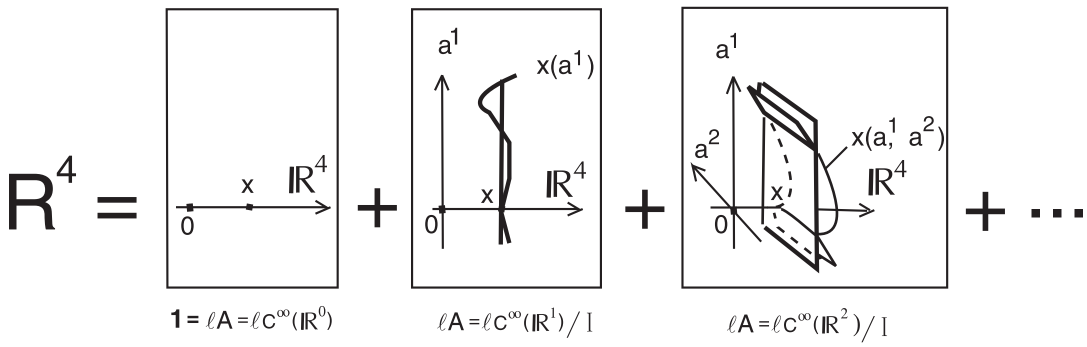

Рис. 1. Физическая (виртуальная) реальность $\mathbf{R}^4$ как сумма многомерных гиперпространств (сред), расслоенных на параллельные 4-мерные вселенные, соответствующих различному «вычислению» реальности.

Прежде чем пойти дальше, укажем на существование вложения Ионеды (Yoneda)

$$y : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}},$$

$$y(\ell A) = Hom_{\mathbb{L}}(-, \ell A).$$

Примем, что кольцо R интерпретируется как функтор $y(\ell C^\infty(\mathbb{R}))$, т.е.$i(R) = y(\ell C^\infty(\mathbb{R}))$. Будем далее писать ℓA вместо $y(\ell A)$ и опустим символ i. Тогда имеем

$$R(-) = \ell C^\infty(\mathbb{R})(-) = Hom_{\mathbb{L}}(-, \ell C^\infty(\mathbb{R})).$$

Аналогично

$$R^{R^4 \times R^4}(\ell A) = Hom_{\mathbb{L}}(\ell A, R^{R^4 \times R^4}) = Hom_{\mathbb{L}}(\ell A \times (R^4 \times R^4), R) =$$

$$= Hom_{\mathbb{L}}(\ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I \times \ell C^\infty(\mathbb{R}^4) \times \ell C^\infty(\mathbb{R}^4), \ell C^\infty(\mathbb{R})) =$$

$$= Hom_{\mathbb{L}^{op}}(\ell C^{\infty}(\mathbb{R}), C^{\infty}(\mathbb{R}^m)/I \otimes_{\infty} C^{\infty}(\mathbb{R}^4) \otimes_{\infty} C^{\infty}(\mathbb{R}^4)) =$$

$$= Hom_{\mathbb{L}^{op}}(C^{\infty}(\mathbb{R}), C^{\infty}(\mathbb{R}^{m+8})/(I,\{0\})) = Hom_{\mathbb{L}}(\ell C^{\infty}(\mathbb{R}^{m+8})/(I,\{0\}), \ell C^{\infty}(\mathbb{R})),$$

где $\ell A = \ell C^{\infty}(\mathbb{R}^m)/I$, $\otimes_{\infty}$ – символ копроизведения C^{∞}-колец, и при вычислении использованы формулы

$$C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \otimes_{\infty} C^{\infty}(\mathbb{R}^k) = C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+k}),$$

$$\frac{\ell A \to \ell C^{\ell B}}{\ell B \times \ell A \to \ell C}.$$

Отсюда следует, что при $\ell A = \ell C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$

$$g^{(4)}(\ell A) = [g \in_{\ell A} R^{R^4 \times R^4}] \equiv g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a)dx^i dx^k, \quad a = (a^1, ..., a^m) \in \mathbb{R}^m.$$

Дополним метрику $g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a)$ до (4+m)-метрики в пространстве $\mathbb{R}^{4+m}$

$$g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a)dx^i dx^k - da^{1^2} - ... - da^{m^2}. \tag{3}$$

Получаем $(4+m)$-мерную геометрию.

Символически процедуру получения многомерных вариантов геометрии, порождаемых интуиционистской 4-геометрией $g^{(4)}$, можно представить в виде формальной суммы

$$g^{(4)} = c_0 \cdot \underbrace{[g^{(4)} \in_{\mathbf{1}} R^{R^4 \times R^4}]}_{\text{4-мерная геометрия}} + c_1 \cdot \underbrace{[g^{(4)} \in_{\ell C^{\infty}(\mathbb{R}^1)} R^{R^4 \times R^4}]}_{\text{5-мерная геометрия}} + ...$$

$$... + c_{n-4} \cdot \underbrace{[g^{(4)} \in_{\ell C^{\infty}(\mathbb{R}^{n-4})} R^{R^4 \times R^4}]}_{\text{n-мерная геометрия}} + ...,$$

где коэффициенты c_m берутся из поля комплексных чисел.

Поскольку стадий несчетное число, то вместо суммы следует писать интеграл

$$g^{(4)} = \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell A] c(\ell A) [g^{(4)} \in_{\ell C^{\infty}(\mathbb{R}^{n-4})} R^{R^4 \times R^4}]. \tag{4}$$

Используем обозначения квантовой механики [5]:

$$g^{(4)} \to |g^{(4)}\rangle, \quad [g^{(4)} \in_{\ell C^{\infty}(\mathbb{R}^{n-4})} R^{R^4 \times R^4}] \to |g^{(4)}(\ell A)\rangle.$$

Тогда (4) перепишется в виде

$$|g^{(4)}\rangle = \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell A] c(\ell A) |g^{(4)}(\ell A)\rangle. \tag{5}$$

[5] Дираковские обозначения: $|P\rangle = \psi(\xi)\rangle \equiv \psi(\xi)$; в данном случае $\psi(\xi)$ – это $g^{(4)}$ (представитель состояния $|P\rangle$), а $|P\rangle$ – это $|g^{(4)}\rangle$ [5, с.111-112].

Таким образом, формальная 4-геометрия Кока-Ловера $\langle R^4, g^{(4)}\rangle$ есть сумма бесконечного числа классических многомерных псевдоримановых геометрий (гиперпространств), которые расслаиваются посредством фиксации $a = a_0$ на 4-мерные параллельные вселенные. Геометрические свойства параллельных вселенных могут, как показано в [9, 10], существенно различаться даже в рамках одной стадии ℓA. О природе, смысле коэффициентов $c(\ell A)$ поговорим ниже в §5.

Здесь как раз уместно вспомнить о средах виртуальносй реальности, которые должны возникать при обращении к модели мультиверса, в данном случае к модели $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$, являющейся генератором виртуальной реальности. Нетрудно понять, что обобщенные элементы $|g^{(4)}(\ell A)\rangle$ – это метрики конкретной среды (=гиперпространство) с «номером» ℓA. Другими словами, обращение к изучению любого объекта теории в стадии ℓA есть не что иное, как переход к одной из сред, входящих в репертуар генератора виртуальной реальности $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$.

3. Космология Дойча-Гёделя

В качестве примера мультиверса рассмотрим космологическое решение Гёделя [6]:

$$g_{ik}^{(4)} = \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{x^1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^{x^1} & 0 & e^{2x^1}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (g^{(4)})^{ik} = \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2e^{-x^1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2e^{-x^1} & 0 & -2e^{-2x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Эта метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (1) с тензором энергии-импульса пылевой материи

$$T_{ik} = c^2 \rho u_i u_k,$$

при условии, что

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{8\pi G}{c^2}\rho, \quad \Lambda = -\frac{1}{2\alpha^2} = -\frac{4\pi G\rho}{c^2}. \tag{7}$$

Если теперь положить

$$\alpha = \alpha_0 + d, \Lambda = \Lambda_0 + \lambda, \rho = \rho_0 + \varrho, \tag{8}$$

где $d, \lambda, \varrho \in D$ – инфинитезималы, и подставить в (7), то имеем

$$\frac{1}{(\alpha_0 + d)^2} = \frac{1}{\alpha_0^2} - \frac{2d}{\alpha_0^3} = \frac{8\pi G}{c^2}(\rho_0 + \varrho),$$

$$2\Lambda_0 + 2\lambda = -\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{2d}{\alpha_0^3}, \quad \Lambda_0 + \lambda = -\frac{4\pi G\rho_0}{c^2} - \frac{4\pi G\varrho}{c^2}.$$

Предположим, что $\alpha_0, \Lambda_0, \rho_0$ связаны соотношениями (7). Тогда из предыдущих равенств находим связь между инфинитезиамалами

$$\lambda = -\frac{4\pi G}{c^2}\varrho, \quad d = -\frac{4\pi G a_0^3}{c^2}\varrho.$$

При интерпретации в гладком топосе $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$ инфинитезимал $\varrho \in D$ в стадии $\ell A = C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ представляется классом гладких функций вида $\varrho(a) mod\ I$, где $[\varrho(a)]^2 \in I$ [7, с.77].

Рассмотрим состояние мультиверса Гёделя, точнее, мультиверса Дойча-Гёделя в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^4)$ [6]. Очевидно, что можно взять инфинитезимал вида $\varrho(a) = a^2$. Мультиверс в этой стадии является 5-мерным гиперпространством, слои которого, задаваемые уравнением $a = a_0$, – параллельные вселенные (среды) $R^4(\ell A)$ с метрикой $g^{(4)}(\ell A) = g^{(4)}_{ik}(x,a)$, заданной формулами (6) с учетом (8). Плотность материи $\rho = \rho_0 + \varrho(a)$ начнет расти от классического значения $\rho_0 \sim 2 \cdot 10^{-31}$ *г/см*^{3} до $+\infty$ при $a \to \pm\infty$. Начинает неограниченно расти до $-\infty$ и космологическая постоянная. Все это говорит о том, что параллельные вселенные могут иметь физические свойства, совершенно отличные от свойств нашей Вселенной.

В стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^2)$ $\varrho(a) = a$ и $\rho = \rho_0 + \varrho(a) \to -\infty$ при $a \to -\infty$, т.е. становится физически неинтерпретируемой, поскольку не ясно, что представляет собой «экзотическая» материя с отрицательной плотностью.

Наконец, в стадии $\mathbf{1} = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a)$ все $\varrho(a) = d(a) = \lambda(a) = 0$, т.е. имеем дело с классической вселенной Гёделя.

4. Квантовые свойства геометрии параллельных вселенных

В излагаемой теории мультиверса естественным образом переносятся идеи квантовой геометродинамики Уилера. Так, формула для амплитуды вероятности перехода от 3-геометрии $g^{(3)}$ физического пространства к 3-геометрии $h^{(3)}$ принимает вид «двойного» интеграла Фейнмана по траекториям, которыми являются различные 4-геометрии $g^{(4)}$:

$$\langle g^{(3)} | h^{(3)} \rangle = \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell A] \int\limits_{g^{(3)}(\ell A)}^{h^{(3)}(\ell A)} \mathcal{D}[g^{(4)}(\ell A)] e^{\frac{i}{\hbar} S[g^{(4)}(\ell A)]},$$

где

$$S[g^{(4)}(\ell A)] = \kappa_m(\ell A) \int\limits_{\mathbb{R}^{4+m}} \sqrt{-\det ||g^{(4)}(\ell A)||} R^{(4)}(\ell A) d^4x d^m a$$

– действие в пространстве $\langle \mathbb{R}^{4+m}, g^{(4)}(\ell A) \rangle$.

Как видим, в действительности интеграл Фейнмана по траекториям $g^{(4)}$ – это бесконечное число интегралов по $(4+m)$-мерным траекториям $g^{(4)}(\ell A)$ вида (3).

Повторяя вычисления Уилера, можно оценить квантовые флутуации 4-метрики $g^{(4)} \to g^{(4)} + \Delta g^{(4)}$, не вносящие искажение в интерференционную картину, задаваемую интегралами по траекториям.

[6] Через $(f_1, ..., f_k)$ обозначается идеал кольца $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, порожденный функциями $f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, т.е. имеющий вид $\sum_{i=1}^k g_i f_i$, где $g_1, ..., g_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – произвольные гладкие функции.

При предположении, что при флуктуациях $\det ||g^{(4)}(\ell A)|| \sim 1$, получаем для искомых флуктуаций в $(4+m)$-мерной области с размерами $L^4 \times L_1^m$

$$\Delta g^{(4)}(\ell A) \sim \frac{L^*}{L}\left(\frac{T}{L_1}\right)^{\frac{m}{2}}, \tag{9}$$

где

$$L^* = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \sim 10^{-33} см$$

– планковская длина и принято, что $\kappa_m(\ell A) \sim c^3/(\hbar G T^m)$, где T [см] – величина, характеризующая «размеры» дополнительных измерений.

Из (9) вытекает, что при $L \sim L^*, L_1 \sim T$ все флуктуации $\Delta g^{(4)}(\ell A) \sim 1$, т.е. становятся существенными. Геометрия и топология «пенятся» на уровне микромира.

Как показано в [13, 14], флуктуации могут иметь место и на макроскопических расстояниях или отрезках времени. Это возможно за счет высших измерений, которые появляются за счет рассмотрения мультиверса в различных стадиях ℓA, т.е. различных состояний (сред) $R^4(\ell A)$ мультиверса.

5. Электроны-двойники

Дойч предположил, что параллельная вселенная образуется за счет *теневых* элементарных частиц, сопровождающих каждую *реальную* частицу. Реальные частицы «мы можем увидеть или обнаружить с помощью приборов, тогда как вторые (теневые – А.Г.) – неосязаемы (невидимы): их можно обнаружить только косвенно через их воздействие на видимые» частицы [1, с.48]. «Между реальными и теневыми фотонами не существует особой разницы: каждый фотон осязаем в одной Вселенной и не осязаем во всех параллельных Вселенных».

Уравнение Дирака в СДГ

$$i\hbar\gamma^{(k)}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - mc\psi = 0 \tag{10}$$

в пространстве-времени Минковского, т.е. в мультиверсе Дойча-Минковского M^4 с метрикой, записанной в виде

$$ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} \tag{11}$$

имеет, например, следующее решение

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{mc}{\hbar}x^2 + g(x^3+x^0) + i\theta\cdot f(x^3+x^0)}, \tag{12}$$

которое при $\theta \cdot f(x^3+x^0) = const$ являтся спинорным духом [7], т.е. имеет нулевой тензор-энергии импульса поля $\psi(x)$

$$T_{ik} = \frac{i\hbar c}{4}\left\{\psi^*\gamma^{(0)}\gamma_{(i)}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\gamma^{(0)}\gamma_{(i)}\psi + \psi^*\gamma^{(0)}\gamma_{(k)}\frac{\partial\psi}{\partial x^i} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^i}\gamma^{(0)}\gamma_{(k)}\psi\right\}. \quad (13)$$

Спинорный дух, как видим, описываемый спинорым *полем* ψ, является призрачным, поскольку не обладает ни энергией, ни импульсом. Уместно вспомнить замечание Эйнштейна на соотношение электромагнитного поля и световых квантов (фотонов). «Эйнштейн считал, что поле «прокладывает путь» световым квантам. Эти поля определяют вероятность найти в системе квант, который переносит вдоль заданного пути энергию и импульс. Сами же поля, поскольку они призрачны, не обладают ни энергией, ни импульсом» [15, с.71-72].

Поскольку духи как спинорное поле не имеют энергии и импульса, то они *не могут фиксироваться приборами.* Они неосязаемы. Именно поэтому Е.В.Палешева предложила [16] отождествлять спинорные духи с теневыми частицами Дойча.

Решению ψ можно сопоставить [8] дираковский ket-вектор $|\Psi\rangle$, представленный в виде суммы [9]

$$|\Psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell A] a(\ell A)|\Psi(\ell A)\rangle. \quad (14)$$

Естественно трактовать $\psi = |\Psi\rangle$. Тогда $\psi^*\psi = \langle\Psi|\Psi\rangle$ – плотность вероятности электрона и

$$\int\limits_{R^4} \psi^*\psi d^4x = \int\limits_{R^4} \langle\Psi|\Psi\rangle d^4x = 1. \quad (15)$$

Полагая, что

$$\langle\Psi| = \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell B] a^*(\ell B)\langle\Psi(\ell B)|.$$

Поэтому

$$1 = \int\limits_{R^4} \langle\Psi|\Psi\rangle d^4x = \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell B] \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell A] a^*(\ell B) a(\ell A)\langle\Psi(\ell B)|\Psi(\ell A)\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell B] a^*(\ell B) \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell A] a(\ell A) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \langle\Psi(\ell B)|\Psi(\ell A)\rangle \right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell B] a^*(\ell B) \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell A] a(\ell A)\delta(\ell B - \ell A) = \int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell B] a^*(\ell B) a(\ell B),$$

[7] Данное решение найдено Е.В.Палешевой.

[8] См. примечание 5.

[9] Приводимая формула и придаваемый ей в этой статье смысл имеет прямое отношение к эвереттовской трактовке квантовой механики [8].

где положили (как логическое продолжение равенства (15), что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \langle \Psi(\ell B) | \Psi(\ell A) \rangle = \delta(\ell B - \ell A),$$

$$\int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell B] f(\ell B) \delta(\ell B - \ell A) = f(\ell A).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{L}} \mathcal{D}[\ell A] a^*(\ell A) a(\ell A) = 1.$$

и вполне разумно допустить, что $a^*(\ell A)a(\ell A)$ – это квадрат модуля амплитуды вероятности стадии ℓA, характеризующий вероятность наблюдения электрона в стадии ℓA мультиверса M^4.

Такой вывод позволяет трактовать $c^*(\ell A)c(\ell A)$, где $c(\ell A)$ – комплексные коэффициенты в разложении (5) 4-метрики мультиверса $\langle R^4, g^{(4)} \rangle$, как вероятность (точнее, квадрат модуля амплитуды вероятности) того, что мультиверс находится в состоянии $|g^{(4)}(\ell A)\rangle$ [10].

Пусть в выражении для спинорного поля (12) число $\theta = 1 - \varepsilon$, где ε инфинитезимал, т.е. $\epsilon \in \mathbb{\Delta} = \{x \in \mathbf{R} | f(x) = 0,\ f \in m^g_{\{0\}}\}$, $m^g_{\{0\}}$ идеал функций, имеющих нулевой росток в 0.

Если $\epsilon \in \mathbb{\Delta}$, то ε в стадии $\ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ задается функцией $\varepsilon(a), a \in \mathbb{R}^n$ такой, что для для любой $\phi \in m^g_{\{0\}} \quad \phi(\varepsilon(a)) \in I$ [7, с.77].

Имеем

$$\phi(\varepsilon(a)) = \phi(\varepsilon(0)) + \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha (\phi \circ \varepsilon)(0) a^\alpha =$$

$$= \phi(\varepsilon(0)) + \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \left(\sum_{|\beta|=1}^{|\alpha|} D^\beta \phi(\varepsilon(0)) P_\beta(\varepsilon(0)) \right) a^\alpha, \tag{16}$$

где α, β – мультииндексы и P_β – некоторые полиномы.

В стадии $\ell C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \phi(\varepsilon(a)) \in I = \{0\}$ для любой $\phi \in m^g_{\{0\}}$. Поэтому из (16) следует, что прежде всего $\phi(\varepsilon(0)) = 0$, и, следовательно, $\varepsilon(0) = 0$. Кроме этого

$$\sum_{|\beta|=1}^{|\alpha|} D^\beta \phi(\varepsilon(0)) P_\beta(\varepsilon(0)) = 0.$$

Но для любой $\phi \in m^g_{\{0\}} \quad D^\beta \phi(0) = 0$. Поэтому $\epsilon(a)$ произвольная функция, удовлетворяющая условию $\varepsilon(0) = 0$.

[10]Метрика – это гравитационное поле, определяющее геометрию и в определенной мере топологию пространства-времени. Поэтому естественно отождествлять состояние (среду) мультиверса $|R^4(\ell A)\rangle$ в стадии ℓA (см., например, рис.1) с состоянием 4-метрики $|g^{(4)}(\ell A)\rangle$.

Возвращаясь к полю (12), примем, что $\theta(a) = 1 - \varepsilon$, где

$$\varepsilon(0) = 0, \ \ \varepsilon(a) > 0 \text{ при } a \neq 0, \text{ и } \epsilon = 1 \text{ при } ||a|| \geq r_0,$$

а f некоторая не равная тождественно нулю функция. Тогда в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\theta(a) = 1 - \varepsilon(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } ||a|| \geq r_0, \\ > 0 & \text{при } ||a|| < r_0. \end{cases}$$

Следовательно, в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)$ поле ψ не является спинорным духом в нашей Вселенной ($a = 0$) и во вселенных с $||a|| < r_0$, но – дух в параллельных вселенных, для которых $\varepsilon(a) \geq r_0$. Можно взять число r_0 столь малым, что вселенные, «помеченные» параметром a с $||a|| < r_0$, в силу квантового вспенивания топологии и геометрии, должны рассматриваться как одна вселенная (r_0 – «толщина» вселенной). Это означает, что поле ψ – это реальная частица в нашей Вселенной и теневые частицы-двойники во всех других вселенных.

Если же взять $\theta \in \mathbb{A}$ так, что

$$\theta(a) > 0 \text{ при } ||a - a_0|| < r_0 \text{ и } \theta(a) = 0 \text{ при } ||a|| > r_0,$$

где $a_0 \neq 0$ и $r_0 < ||a_0||$, то поле ψ в стадии $\ell C^\infty(\mathbb{R}^n)$ не является спинорным духом во вселенной $a = a_0$, имеющей «толщину» r_0, и является духом, т.е. теневой частицей-близнецом, во всех других вселенных, включая нашу Вселенную ($a = \ 0$).

При этом в стадии $\mathbf{1} = \ell C^\infty(\mathbb{R}^0) = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^1) \quad \theta \cdot f(x^3 + x^0) \mod \{a^1\} = f(x^3 + x^0)$. Это означает, что мы имеем дело с обычной частицей, несущей энергию и импульс.

6. Фотонные духи и фотоны-двойники

Как известно, плоская монохроматическая электромагнитная волна описывается волновым уравнением

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = \Delta \vec{\mathbf{A}}$$

и имеет, например, следующий вид

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A_0}} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}.$$

Електрическая и магнитная напряженности волны равны

$$\vec{\mathbf{E}} = i|k|\vec{\mathbf{A}}, \quad \vec{\mathbf{H}} = i[k \times \vec{\mathbf{A}}]. \tag{17}$$

Для тензора энергии-импульса волны имеем

$$T^{ij} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^i k^j,$$

где

$$W = \frac{\vec{\mathbf{E}}^2}{4\pi}$$

– плотность энергии волны.

Из приведенных формул видно, что если сделать подстановку $\vec{\mathbf{A}} \to d\vec{\mathbf{A}}$, где $d \in D$, то получим

$$\vec{\mathbf{E}} \to d\vec{\mathbf{E}} \Longrightarrow \vec{\mathbf{E}}(\ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^2)) \neq 0 \text{ при } a \neq 0,$$

тогда как $W \to d^2 W = 0$ и, следовательно, $T_{ik} \equiv 0$, т.е. имеем фотонный дух во всех вселенных мультиверса, наблюдаемый в виде электромагнитной волны, не несущей ни энергии, ни импульса во всех мирах, кроме мира с $a = 0$, где ее просто нет.

Рассмотрим теперь число $\vartheta \in R$. Пусть в стадии $\ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ оно задается классом функций $\vartheta(a) \mod I$, где

$$\vartheta(a) = e^{-k|a|^2} - 1, \quad k > 0. \tag{18}$$

Пусть электромагнитное поле

$$\vec{\mathbf{E}} = i\vartheta|k|\vec{\mathbf{A}}, \quad \vec{\mathbf{H}} = i\vartheta[k \times \vec{\mathbf{A}}], \quad \vec{\mathbf{A}} \neq 0$$

получается из (17) подстановкой $\vec{\mathbf{A}} \to \vartheta\vec{\mathbf{A}}$.

Тогда

$$\vec{\mathbf{E}}(\ell C^\infty(\mathbb{R})/(\vartheta^2)) \neq 0,$$

но

$$T^{ij} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^i k^j (\ell C^\infty(\mathbb{R})/(\vartheta^2)) \mod (\vartheta^2) = 0.$$

Иначе говоря, в стадии (среде) $\ell C^\infty(\mathbb{R})/(\vartheta^2)$ во всех вселенных наблюдаюся фотоны-двойники, не несущие ни энергии, ни импульса, т.е. являющиеся фотонными духами.

7. Виртуальные реальности как топосные модели формального мультиверса

Поскольку «множество действительных чисел» R в $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$ не обладает многими привычными свойствами обычных действительных чисел из $\mathbb{R}$, то, пребывая в средах этого генератора виртуальной реальности, мы должны были наблюдать неожиданные или непривычные факты и явления. Некоторые из них были описаны в данной статье.

Топос $\mathbf{Set}^{\mathbb{L}^{op}}$, как уже говорилось, не единственная допустимая модель для формальной теории $\mathcal{T}$. Обращение к другим моделям, другим генераторам виртуальной реальности приведет нас к знакомству с другими возможными реальностями, но трудно сказать, какая из них ближе к той, которая носит название *окружающая нас физическая реальность*.

Литература

1. Дойч Д. *Структура реальности.* Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
2. Kock A. *Synthetic Differential Geometry.* Cambridge Univ. Press, 1981.
3. Guts A.K., Grinkevich E.B. *Toposes in General Theory of Relativity.* – Los Alamos E-print paper: gr-qc/9610073 (1996). - http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9610073
4. Гуц А.К. *Интуиционистская теория пространства-времени* // Международная геометрическая школа-семинар памяти Н.В.Ефимова. Тезисы докладов. Абрау-Дюрсо. 27 сентября - 4 октября 1996 года.- Ростов-на Дону,1996.- С.87-88.
5. Дирак П. *Принципы квантовой механики.* М.: Наука, 1979.
6. Gödel K. *An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equations of Gravitation* // Rev. Mod. Phys. 1949. V.21, No.3. P.447-450.
7. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infenitesimal Analysis.* Springer-Verlag, 1991.
8. *Квантовая механика Эверетта* // Сайт в Интернет http://www.univer.omsk.su/omsk/Sci/Everett.
9. Guts A.K., Zvyagintsev A.A. *Interpretation of intuitionistic solution of the vacuum Einstein equations in smooth topos.* – Los Alamos E-print Paper: gr-qc/0001076 (2000).
10. Гуц А.К., Звягинцев А.А. *Решение почтивакуумных уравнений Эйнштейна в синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера* // Математические структуры и моделирование. 2000. Вып.6. С.115-127.
11. Гуц А.К., Звягинцев А.А. *Интуиционистская логика и сигнатура пространства-времени* // Логика и приложения. Международ. конференция, посвящ. 60-летию Ю.Л.Ершова. Тезисы докладов. – Новосибирск: Ин-т дискрет. мат-ки и информатики, 2000. С.38-39.
12. Гуц А.К. *Многозначная логика и многовариантный мир* // Логика и приложения. Международ. конференция, посвящ. 60-летию Ю.Л.Ершова. Тезисы докладов. – Новосибирск: Ин-т дискрет. мат-ки и информатики, 2000. С.36-37.
13. Guts A.K. *Interaction of the Past of parallel universes.* - Los Alamos E-print Paper: physics/9910037 (1999).
14. Гуц А.К. *Модели многовариантной истории* // Математические структуры и моделирование. 1999. Вып.4. С.5-14.
15. Белокуров В.В., Тимофеевская О.Д., Хрусталев О.А. *Квантовая телепортация – обыкновенное чудо.* Ижевск: *R&C Dynamics*, 2000.
16. Palesheva E.V. *Ghost spinors, shadow electrons and the Deutsch Multiverse.* – Los Alamos E-print paper: gr-qc/0108017 (2001).