Математические структуры и моделирование
2000, вып. 6, с. 115–127

УДК 514.77

РЕШЕНИЕ ПОЧТИВАКУУМНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА В СИНТЕТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КОКА-ЛОВЕРА

А.К. Гуц, А.А. Звягинцев

In the article by using ideas SDG, non-classical spherically symmetric solution of the vacuum Einstein equations is given and considered at different stages of smooth topos $\mathbf{Sh}(\mathbf{L})$. Infinitesimal "weak" gravitational field can be strong at some stagies, for which we have the additional dimensions. For example, the cosmological constant is not constant with respect to additional dimensions. Signature of space-time metric can depend of density of vacuum and cosmological constant.

1. Синтетическая теория гравитации

Теоретическая физика всегда стремилась оперативно использовать новые идеи, появляющиеся в математике. Поэтому не стоит удивляться, что новая теоретико-топосная математика [4, 5, 7] сразу была привлечена к решению ряда проблем теории относительности и гравитации [9, 12, 14] и квантовой теории [2, 3, 10]. Формально, например, теоретико-топосную геометрию удобно развивать в рамках синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера [5] (далее для краткости пишем SDG), моделями которой служат топосы – категории, обладающие многими свойствами традиционной теории множеств, являющейся основой математики XX века.

Синтетическая дифференциальная геометрия Кока-Ловера [5] строится на основе замены поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ на коммутативное упорядоченное кольцо $\mathbf{R}$, позволяющее определить на нем дифференцирование, интегрирование и «натуральные числа». Предполагается, что существует D такое, что $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 0\}$ и выполнена аксиома Кока-Ловера: для любой $g : D \to \mathbf{R}$ существуют единственные $a, b \in \mathbf{R}$ такие, что для любого $d \in D$ $g(d) = a + d \cdot b$. Это означает, что любая функция в данной геометрии является дифференцируемой, но при этом не выполняется закон исключенного третьего. Другими словами, в SDG действует интуиционистская логика. Таким образом, синтетическая теория гравитации является одним из примеров интуиционистской теории поля, которой в последнее время уделяют особое внимание в связи с исследованиями в области квантовой гравитации [2, 3, 9]. Отметим также,что элементы $d \in D$ называются инфинитезималами, т.е. бесконечно малыми числами первого порядка, а на кольцо $\mathbf{R}$ можно упрощенно смотреть как на поле

E-mail: guts@univer.omsk.su, zvj@mail.ru
Омский государственный университет

вещественных чисел $\mathbb{R}$, дополненное инфинитезималыми, как первого, так и более высокого порядка. Пространство всех инфинитезималых кольца $\mathbf{R}$ будем далее обозначать символом Δ.

Уравнения Эйнштейна в SDG можно записывать с *ненулевым* тензором энергии-импульса, например в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}(R - 2\Lambda) = \frac{8\pi G}{c^2}\ d \cdot u_i u_k, \tag{1}$$

где плотность материи $d \in D$ –произвольно взятый инфинитезимал [15][1].

Для инфинитезимала справедливы невозможные с точки зрения классической логики соотношения: $d \leq\ 0\ \&\ d \geq 0$, причем формулы $d = 0,\ d \neq 0$ не являются истинными. Такая удивительная неклассическая плотность вакуумной материи тем не менее согласуется с привычным занулением правой части уравнений Эйнштейна в случае вакуума в общей теории относительности. Для этого достаточно записать уравнения на конечном объекте соответствующей модели этой теории.

2. Сферически-симметричное поле

Как уже отмечалось выше, уравнения Эйнштейна в SDG, описывающие гравитационное поле, создаваемое некоторой материальной системой, должны иметь следующий вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}(R - 2\Lambda) = \kappa T_{ik}.$$

Здесь $R_{ik} = R^l_{ilk},\ R = g^{ik}R_{ik},\ \kappa = 8\pi G/c^4$.

Рассмотрим случай, когда гравитационное поле обладает центральной симметрией. Центральная симметрия поля означает, что интервал пространства-времени может быть взят в виде

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu(r,t)}dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2).$$

Отметим, что такой вид метрики не определяет еще выбора временной координаты однозначным образом: данная метрика может еще быть подвергнута любому преобразованию вида $t = f(t')$, не содержащему r.

Все вычисления проводятся так же, как и в классическом случае. При этом считаем компоненты метрического тензора обратимыми величинами. Символы Кристоффеля можно вычислять по обычной формуле:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right).$$

[1] Нетрудно заметить, что (1) является частным случаем интуиционистского уравнения $\neg\neg(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}(R - 2\Lambda) = 0)$, поскольку двойное отрицание равенства нулю во многих моделях синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера совпадает с утверждением о принадлежности выражения, стоящего слева от нуля, пространству всех инфинетезималых. Заметим также, что это уравнение является следствием «почти» уравнения Эйлера-Лагранжа, играющего важную роль в синтетическом вариационном исчислении [1]. Поэтому уравнения вида (1) будем называть почтивакуумными уравнениями Эйнштейна.

Подставляя в эту формулу g_{ik}, получаем:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda'}{2},\Gamma^0_{10}=\frac{\nu'}{2},\Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\Gamma^0_{11}=\frac{\dot\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu},\Gamma^1_{22}=-r\mathrm{e}^{-\lambda},\Gamma^1_{00}=\frac{\nu'}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda},$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=1/r,\Gamma^3_{33}=\operatorname{ctg}\theta,\Gamma^0_{00}=\frac{\dot\nu}{2},\Gamma^1_{10}=\frac{\dot\lambda}{2},\Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r, а точка – дифференцирование по t.

Тензор Риччи также вычисляется по известной формуле

$$R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x_l}-\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x_k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}.$$

Простые вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}-\Lambda=\kappa T^1_1, \tag{2}$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}\left(\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}-\frac{\dot\nu\dot\lambda}{2}\right)-\Lambda=\kappa T^2_2=\kappa T^3_3, \tag{3}$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2}-\Lambda=\kappa T^0_0, \tag{4}$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r}=\kappa T^1_0. \tag{5}$$

Уравнение (3), как известно [13, с.235], является следствием уравнений (2),(4), (5) и закона сохранения

$$T^{ik}{}_{;k}=0. \tag{6}$$

Поэтому в дальнейшем уравнение (3) опускаем.

2.1. Поле вакуума

Рассмотрим теперь важный пример гравитационного поля в вакууме. Для этого возьмем T^i_k равным $c^2\rho u^i u_k$, т.е. тензор энергии-импульса пылевой материи. Здесь ρ – плотность пыли в пространстве, которую будем считать в дальнейшем постоянной величиной. Считая теперь, что система находится в сопутствующей системе координат, получаем, что $u_i=(\mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2}},0,0,0)$, а $u^k=g^{ik}u_i=(\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}},0,0,0)$. Таким образом, $T^0_0=c^2\rho$, $T^1_1=T^2_2=T^3_3=0$, и уравнения (2),(4),(5) примут следующий вид:

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}-\Lambda=0, \tag{7}$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2}-\Lambda=c^2\kappa\rho, \tag{8}$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r}=0. \tag{9}$$

Учитывая теперь вид тензора энергии-импульса и уравнение (9), перепишем уравнение (6) следующим образом:

$$\rho\nu'=0. \tag{10}$$

Попытаемся разрешить эти уравнения, используя уравнение (10). Так, из уравнения (9) следует, что $\lambda(r,t)=\lambda(r)$, т.е. λ не зависит от координаты t. Поскольку ρ и Λ постоянны, то уравнение (8) нетрудно проинтегрировать. В самом деле, приняв $\mathrm{e}^{-\lambda}$ за u, получаем:

$$u'r+u=1-(\Lambda+\kappa c^2\rho)r^2. \tag{11}$$

Решая однородное уравнение $u'r+u$ находим, что $u=Ar^{-1}$, где $A=const$. Таким образом, решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$u=\frac{A(r)}{r}.$$

Подставляя его в (11), выводим условие на $A(r)$:

$$A'(r)=1-(\Lambda+\kappa c^2\rho)r^2.$$

Интегрируем это уравнение и получаем, что

$$A(r)=r-\frac{(\Lambda+\kappa c^2\rho)r^3}{3}+C.$$

Отсюда

$$u(r)=1-\frac{(\Lambda+\kappa c^2\rho)r^2}{3}+\frac{C}{r}.$$

Или, возвращаясь к прежним обозначениям,

$$\mathrm{e}^{-\lambda}=1-\frac{(\Lambda+\kappa c^2\rho)r^2}{3}+\frac{C}{r}. \tag{12}$$

Здесь C – постоянная интегрирования.

Далее, имея в виду найти выражение для ν, проинтегрируем уравнение (7). Но для начала рассмотрим уравнение (10).

Нетрудно заметить, что $\rho=d,\ \nu'=d$ при любом $d\in D$ является его решением. Таким образом, из существования таких объектов, как $D,\ D_2,\ D(2)$, $\triangle$ и т.д. [5], следует, что кроме классических его решений

$$(\rho=0\ \&\ \nu'\neq 0)\vee(\nu'=0\ \&\ \rho\neq 0)\vee(\rho=0\ \&\ \nu'=0)$$

существуют и другие, неклассические. К их числу относятся ρ и ν', неотделимые от нуля. Первый из указанных классических случаев приводит к известному классическому решению Шварцшильда. Рассмотрим неклассический случай решения уравнения (10), когда обе величины ρ и ν' одновременно неотделимы от нуля.

Как нетрудно заметить, в этом случае тензор энергии-импульса становится инфинитезималым, а само уравнение Эйнштейна превращается в почтивакуумное.

Подставляя (12) в (7) и учитывая (10), получаем:

$$\frac{\nu'}{r}\left(1+\frac{C}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}\right)+\frac{2}{3}\Lambda-\frac{\kappa c^2\rho}{3}+\frac{C}{r^3}=0. \tag{13}$$

Отсюда легко заметить, что $\frac{2}{3}\Lambda+\frac{C}{r^3}$ неотделимо от нуля. Кроме того, при рассмотрении этого выражения в некоторой модели SDG в стадии **1** это выражение становится равным нулю, что возможно лишь в том случае, когда и Λ и C в этой стадии равны нулю. Таким образом, заключаем, что C и Λ также необратимы, а значит, и $\frac{C}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}$ необратимо. Используя теперь (10), преобразуем (13) к виду

$$\nu'\left(1+\frac{C}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}+\frac{\kappa c^2\rho r^2}{6}\right)=\frac{\kappa c^2\rho r}{3}-\frac{2}{3}\Lambda\cdot r-\frac{C}{r^2}$$

или, что эквивалентно,

$$\nu'=\frac{\frac{1}{3}\cdot\kappa c^2\rho r-\frac{2}{3}\Lambda\cdot r-Cr^{-2}}{1+Cr^{-1}-\frac{1}{3}\Lambda r^2+\frac{1}{6}\kappa c^2\rho r^2}. \tag{14}$$

Решая это уравнение, находим, что

$$\nu=\ln\left|1+\frac{C}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}+\frac{\kappa c^2\rho r^2}{6}\right|+f(t),$$

где $f(t)$ – произвольная функция, зависящая только от координаты t. В силу того, что мы оставили за собой еще возможность произвольного преобразования времени вида $t=g(t')$, которое эквивалентно прибавлению к ν произвольной функции времени, то с его помощью $f(t)$ всегда можно обратить в нуль. Итак, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\nu=\ln\left|1+\frac{C}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}+\frac{\kappa c^2\rho r^2}{6}\right|. \tag{15}$$

Подставляя эти значения для λ и ν в выражение для ds^2, получаем, что

$$ds^2=\left(1+\frac{(\kappa c^2\rho-2\Lambda)r^2}{6}+\frac{C}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{(\Lambda+\kappa c^2\rho)r^2}{3}+\frac{C}{r}\right)^{-1}dr^2-$$

$$-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\cdot d\varphi^2). \tag{16}$$

Эту метрику будем называть решением Шварцшильда почтивакуумного уравнения Эйнштейна.

Естественно считать, что гравитационное поле не имеет сингулярностей во всем пространстве. Это означает, что метрика не имеет особенностей в $r = 0$. Поэтому будем считать, что C равно нулю. Исходя из этого и умножая правую и левую часть уравнения (13) на ρ, получаем, что

$$2\Lambda\rho = \kappa c^2 \rho^2 \tag{17}$$

и, кроме того, Λ – необратимая величина кольца $\mathbf{R}$.

Другими словами, материя имеет неклассическую плотность, а гравитационное поле имеет вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{(\kappa c^2\rho - 2\Lambda)r^2}{6}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{(\Lambda + \kappa c^2\rho)r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - $$
$$ -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2). \tag{18}$$

В основных моделях синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера в стадии **1** эта метрика совпадает с метрикой пространства-времени Минковского. Грубо говоря, неклассический «пылевидный» вакуум имеет «бесконечно малое» слабое гравитационное поле.

2.2. Поле газового шара

Если гравитационное поле создается сферическим газовым шаром радиуса a, с тензором энергии импульсы идеального газа $\tilde{T_{ik}}$, то из формулы (4) с учетом условия отсутствия сингулярностей у материи $\lambda|_{r=0} = 0$ имеем

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{\kappa}{r}\int\limits_0^r \tilde{T_0^0} r^2 dr - \frac{\Lambda r^2}{3}\right).$$

Вне шара имеем вакуум с $\tilde{T_{ik}} = c^2\rho u_i u_k$ с гравитационным полем, изученным в предыдущем пункте. Поэтому можно применить выражение (12), из которого следует, что

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{\Lambda + \kappa c^2\rho}{3} r^2 + \frac{C}{r}\right).$$

Сравнивая оба выражения при $r = a$, находим, что

$$C = \kappa \cdot \left(\frac{c^2\rho a^3}{3} - \int\limits_0^a \tilde{T_0^0} r^2 dr\right). \tag{19}$$

Из необратимости C и ρ, а также из вида (19) следует, что $\int_0^a \tilde{T_0^0} r^2 dr$ необратим, а это возможно только в двух случаях: 1) $\tilde{T_0^0}$ – неотделим от нуля; 2) a – неотделим от нуля.

Таким образом, выполняется следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть газовый шар обладает классической ненулевой плотностью ($\tilde{T}_0^0 \neq 0$) и создает внешнее центрально-симметричное гравитационное поле (16) с пылевидной инфинитезимальной плотностью ρ. Тогда шар имеет инфинитезималые пространственные размеры.* ■

Интересно, что в классическом случае решение Шварцшильда находилось в предположении, что гравитационное поле создается шаром, являющимся так называемой материальной точкой, то есть не имеющей размеров. Такая ситуация характеризовалась словом «идеализация». В неклассическом случае у материальной точки «появляются» вполне законные размеры, но они задаются неклассическими (бесконечно малыми) числами.

Заметим, что, в отличие от классического решения, постоянную C не так просто выразить через массу шара. В самом деле, следуя классической процедуре, получаем, что, с одной стороны, на больших расстояниях, где поле слабо, имеет место закон Ньютона. Следовательно,

$$g_{00} = 1 - \frac{2Gm}{r},$$

где m – полная масса шара, создающего гравитационное поле. С другой стороны,

$$g_{00} = 1 + \frac{\kappa c^2 \rho - 2\Lambda}{6} r^2 + \frac{C}{r}.$$

Отсюда видно, что

$$C = \frac{2\Lambda - \kappa c^2 \rho}{6} r^3 - \frac{2Gm}{c^2}$$

– противоречие с тем, что $C = const$.

Ниже мы рассмотрим полученную в предыдущей главе метрику в некотором топосе, являющимся моделью синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера, или, более точно, в категории пучков $\mathbf{Sh}(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ – такая подкатегория категории $\mathbf{L}$ [8], что кольцо $\mathbf{R} = \mathbf{a}\mathrm{hom}(-, \ell C^\infty(\mathbb{R})$ архимедово и локальное[2]. Здесь $\mathbf{a}$ обозначает действие функтора пучковизации.

3. Почтивакуумные уравнения Эйнштейна в моделях SDG

Синтетическая теория гравитации уравнения Эйнштейна, предложенная выше, написана в «наивном» стиле, т. е. содержат термин «элемент» или теоретико-множественные формулы вида $a \in A$, но в силу того, что аксиома Кока-Ловера интуиционистская, а следовательно не имеет своего аналога в категории множеств **Set**, необходимо определить эти выражения в декартово-замкнутых категориях, и в частности в топосах. Для решения этой проблемы вводится понятие обобщенного элемента $b \in_X B$ как отображения $X \xrightarrow{b} B$, где X – произвольный объект декартово-замкнутой категории (топоса), называемый *стадией определения* или *областью изменения* элемента b[3]. Как отмечает Кок (см. [5]), «при

[2]Примерами таких предкатегорий являются категории замкнутых и germ-detrmined идеалов, подробнее о которых можно прочитать в [8].

[3]Классический (глобальный) элемент – это морфизм $\mathbf{1} \to B$.

мышлении с точки зрения физики становится понятным название «области изменения», поскольку:

1) с неатомистической точки зрения «тело» B описывается не только своими «атомами», т.е. глобальными элементами $b \in B$, но также «частицами» изменяющегося размера X;

2) движения, которые происходят в B, параметризуются временной протяженностью X. Оба этих случая будут описываться отображением $X \to B$ для подходящей области изменения X».

В нашем случае роль «тела» B будет играть гравитационное поле g_{ik}, или геометрия пространства–времени, которую мы будем изучать на различных стадиях.

В случае топоса $\mathbf{Sh}(\mathcal{C})$ концепция стадий реализуется с помощью следующего метода.

Из теории пучков (см. [7]) известно, что существуют вложение Йонеды

$$y : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}},$$

такое, что

$$y(\ell A)(\ell B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\ell B, \ell A),$$
$$y(\ell A)(\alpha) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\ell C, \ell A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\ell B, \ell A),$$
$$y(\ell A)(\alpha)(u) = u \circ \alpha, u : \ell C \to \ell A$$

для любого отображения $\alpha : \ell B \to \ell C$ в категории $\mathcal{C}$, и функтор пучковизации

$$\mathbf{a} : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}),$$

композиция которых дает функтор:

$$\mathbf{a}y : \mathcal{C} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}).$$

Далее, вместо $ay(\ell A)$ мы будем писать просто ℓA, таким образом, если $\mathbf{R} = \ell C^\infty(\mathrm{I\!R})$, то

$$\mathbf{R} \equiv y(\mathbf{R}) = \mathbf{a}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \ell C^\infty(\mathrm{I\!R})).$$

Следовательно, элемент кольца $\mathbf{R}$ (т.е. «синтетическое» *вещественное число*) может быть представлен произвольным морфизмом вида $\ell A \to \ell C^\infty(\mathrm{I\!R})$. Будем говорить в этом случае, что это число записано в стадии ℓA. Это означает, в частности, что уравнение Эйнштейна и полученная в предыдущих главах метрика должны быть рассмотрены на различных стадиях, например на стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathrm{I\!R}^n)/I$, где I – некоторый идеал кольца $C^\infty(\mathrm{I\!R}^n)$. Заметим, что событием x пространства–времени $\mathbf{R}^4$ на стадии ℓA является класс C^∞–гладких векторных функций $(X^0(a), X^1(a), X^2(a), X^3(a)) : \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R}^4$, где каждая функция $X^i(a)$ берется по модулю идеала I. Аргумент $s \in \mathrm{I\!R}^n$ играет роль некоторого «скрытого» параметра, соответствующего стадии ℓA. Из этого следует, что на стадии вещественных чисел $\mathbf{R} = \ell C^\infty(\mathrm{I\!R})$ изучаемого топоса событие x описывается C^∞–гладкой векторной функцией $(X^0(a), X^1(a), X^2(a), X^3(a)), a \in \mathrm{I\!R}$, а на стадии $\mathbf{R}^2 = \ell C^\infty(\mathrm{I\!R}^2)$ событие x – это 2-мерная поверхность, т.е. *струна.*

Классические четыре числа $(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ для координат события получаются на стадии $\mathbf{1} = \ell C^\infty(\mathbb{R}^0) = \ell C^\infty(\mathbb{R})/\{a\}$, т.е. $x^i = X^i(0), i = 0, 1, 2, 3$.

Элемент пространства Δ, или просто инфинитезималый, на стадии ℓA – это класс $f\mathrm{mod}\ I$ такой, что для каждого $\varphi \in m^g_{\{0\}} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ $\varphi \circ f \in I$, где $m^g_{\{0\}}$ – идеал функций, зануляющихся в окрестности нуля.

Псевдовакуумные уравнения Эйнштейна, условия инфинитезимальности для космологической постоянной и плотности и их соотношение

$$2\Lambda\rho = \kappa\rho^2$$

на стадии $lA = lC^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ принимают следующий вид:

$$R_{ik}(a) - \frac{1}{2}g_{ik}(a)(R(a) - 2\Lambda(a)) = \kappa\rho(a)u_i(a)u_k(a)\mathrm{mod}I$$

$$f \circ \Lambda(a) = 0 \text{ mod } I \tag{20}$$

$$f \circ \rho(a) = 0 \text{ mod } I \tag{21}$$

$$2\Lambda(a)\rho(a) - \kappa\rho^2(a) = 0 \text{ mod } I \tag{22}$$

для любого $f \in m^g_0$, где $s \in \mathbb{R}^n$.

Решение g_{ik} в этом случае можно записать следующим образом[4]:

$$g_{ik}(a) = diag\left\{1+\frac{\kappa\rho(a) - 2\Lambda(a)}{6}r^2, -\frac{1}{1 - \frac{1}{3}(\kappa\rho(a) + \Lambda(a))r^2)}, -r^2\sin^2\theta, -r^2\right\} \tag{23}$$

по модулю $I \cdot C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4)$.

Проиллюстрируем вышеописанные уравнения на некоторых конкретных примерах, ограничиваясь случаем конечнопорожденных идеалов.

3.1. Стадия 1

Как уже отмечалось ранее, классической общей теории относительности отвечает стадия **1**. В этой стадии метрика (18) является метрикой пространства–времени Минковского:

$$g_{ik}(t, r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix},$$

т.е. Λ и ρ равны нулю. Действительно,

$$\varphi(\rho(a)) = \varphi(\rho(0)) + \varphi'(\rho(0))\rho'(0)a + o(|a|). \tag{24}$$

[4]Здесь и далее рассматривается случай $C = 0$.

Поскольку $\varphi(\rho(a)) \in I = \{a\}$, то $\varphi(\rho(0)) = 0$. Следовательно, $\rho(0) = 0$, так как $\varphi \in m^g_{\{0\}}$. Тогда $\rho \bmod I = 0$. Аналогично $\Lambda \bmod I = 0$, $C \bmod I = 0$.

В этой стадии метрика (18) совпадает с метрикой специальной теории относительности. Таким образом, космологическая модель с этой метрикой может быть названа обобщенной моделью специальной теории относительности.

3.2. Стадия $D = \ell C^\infty(\mathbb{R})/\{a^2\}$

В этом случае

$$g_{00}(a) = 1 + \frac{1}{6}(\kappa c^2\rho_1 - 2\Lambda_1)ar^2 + C_1 ar^{-1},$$

$$g_{11}(a) = -\left(1 - \frac{1}{3}(\kappa c^2\rho_1 + \Lambda_1)ar^2 + C_1 ar^{-1}\right)^{-1},$$

а другие g_{ik} являются классическими. Действительно, как следует из (24),

$$\varphi(\rho(0)) = \varphi'(\rho(0))\rho'(0) = 0.$$

Поскольку $\varphi|_U \equiv 0$, $\varphi'|_U \equiv 0$ для некоторой окрестности 0, тогда $\rho(0) = 0$. Таким образом, $\rho \bmod I = \rho_1 a$, $\rho_1 \in \mathbb{R}$. Аналогично $\Lambda \bmod I = \Lambda_1 a$, $\Lambda_1 \in \mathbb{R}$.

3.3. Стадия $D_p = \ell C^\infty(\mathbb{R})/\{a^{p+1}\}$

Здесь получаем

$$g_{00}(a) = 1 + \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{(\kappa c^2\rho_k - 2\Lambda_k)}{6}\cdot r^2 + \frac{C_k}{r}\right]a^k,$$

$$g_{11}(a) = -\left[1 - \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{(\kappa c^2\rho_k + \Lambda_k)}{3}\cdot r^2 - \frac{C_k}{r}\right)a^k\right]^{-1}.$$

3.4. Стадия $D_n(k) = \ell J^k_n = \ell C^\infty_0(\mathbb{R}^n)/m^{k+1}$

Пусть $m = f|f(0) = 0$ – максимальный идеал кольца $\ell C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$g_{00}(a,t,r,\varphi,\theta) = 1 + \sum_{l=1}^{k}\sum_{i_1,\dots,i_l=1}^{n}\left[\frac{(\kappa c^2\rho_{i_1,\dots,i_l} - 2\Lambda_{i_1,\dots,i_l})}{6}r^2 + \frac{C_{i_1,\dots,i_l}}{r}\right]a_{i_1}\dots a_{i_l},$$

$$g_{11}(a,t,r,\varphi,\theta) = -\left(1 - \sum_{l=1}^{k}\sum_{i_1,\dots,i_l=1}^{n}\left[\frac{(\kappa c^2\rho_{i_1,\dots,i_l} + \Lambda_{i_1,\dots,i_l})}{3}r^2 - \frac{C_{i_1,\dots,i_l}}{r}\right]a_{i_1}\dots a_{i_l}\right)^{-1}.$$

Здесь $a = (a_1,\dots,a_n)$.

3.5. Стадия $\ell C^\infty(\mathbb{R}^2)/\{a_1 - a_2\}$

В этом случае функции Λ, ρ, C зависят от одной переменной, например a_2, и зануляются в 0. Тогда

$$g_{00} = 1 + \frac{\kappa c^2\rho(a_2) - 2\Lambda(a_2)}{6} r^2 + \frac{C(a_2)}{r},$$

$$g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{3}(\kappa c^2\rho(a_2) + \Lambda(a_2))r^2 + C(a_2)r^{-1}}.$$

3.6. Стадия $\ell C^\infty(\mathbb{R})/\{\sin\pi a, \cos\pi a\}$

Если $\rho \in D$ то

$$\rho(a) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos k\pi a + \beta_k \sin k\pi a = A \bmod I, \qquad A \in \mathbb{R},$$

$$\rho^2(a) = A^2 \bmod I \in I \Longrightarrow A = 0.$$

Следовательно, $\rho = 0$, $\Lambda = 0$ и g_{ik} в этом случае совпадает с метрикой Минковского.

3.7. Стадия $\ell C^\infty(U)$

Рассмотрим стадию $\ell C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Поскольку

$$\ell C^\infty(U) \cong \ell C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})/\{a_{n+1}\cdot\chi(a) - 1\},$$

$$U = \{a \in \mathbb{R}^n | \chi(a) \neq 0\}, \qquad \chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

то при замене переменных

$$\begin{cases} a\prime = a \\ a'_{n+1} = a_{n+1}\cdot\chi(a) - 1 \end{cases}$$

мы можем получить, например, что

$$\rho(a, a_{n+1}) \bmod I = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} A_\alpha a^\alpha, \qquad a \in U, \quad A_\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\rho\left(0, \frac{1}{a(0)}\right) = 0.$$

3.8. Переходы от стадии к стадии

В том случае, когда существует морфизм между двумя стадиями:

$$lB \xrightarrow{\psi} lA,$$

переход между множествами $\mathbf{a}hom(lA,T)$ и $\mathbf{a}hom(lB,T)$ осуществляется с помощью отображения

$$\mathbf{a}hom(lA,T) \xrightarrow{\Psi} \mathbf{a}hom(lB,T)$$

для любого объекта T категории $\mathcal{C}$, которое каждой функции $h : lA \to T$ ставит в соответствие $h\Psi : lB \to T$

Пусть теперь $lA = lC^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ и $lB = lC^\infty(\mathbb{R}^m)/J$. Тогда компоненты g_{00} и g_{11} метрики(23) под действием преобразования между стадиями Ψ примут вид:

$$g_{00}(b) = 1 + \frac{1}{6}\left(\kappa\rho(\Psi(b)) - 2\Lambda(\Psi(b))\right) r^2,$$

$$g_{11}(b) = -\frac{1}{1 - \frac{1}{3}(\kappa\rho(\Psi(b)) + \Lambda(\Psi(b)))r^2}$$

по модулю $J \cdot C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^4)$. Другие компоненты (23)останутся без изменения.

Соответственно, условия инфинитезимальности для Λ и ρ перепишутся так:

$$f \circ \Lambda \circ \Psi(b) = 0 \bmod J,$$

$$f \circ \rho \circ \Psi(b) = 0 \bmod J.$$

4. Физическая интерпретация

Первым делом заметим очень интересный факт: на всех рассмотренных стадиях сигнатура метрики g_{ik} зависит от вида функций Λ, ρ и C. Например, на стадии $D = \ell C^\infty(\mathbb{R})/\{a^2\}$ $\rho \bmod I = \rho_1 a$, $\Lambda \bmod I = \Lambda_1 a$, $C \bmod I = C_1 a$, где $\rho_1, \Lambda_1, C_1 \in \mathbb{R}$ суть простые вещественные числа (при $C = 0$ условие (17) выполняется для всех $a \in \mathbb{R}$). Следовательно, гравитационное поле g_{ik} не является слабым в соответствующем пятимерном пространстве–времени с координатами $(t, r, \theta, \varphi, a)$. Более интересные ситуации могут быть изучены на стадиях $D_n(k) = \ell J_n^k = lC_0^\infty(\mathbb{R}^n)/m^{k+1}$ и $\ell C^\infty(\mathbb{R}^2)/\{a_1 - a_2\}$.

Заметим также, что на стадии $\ell C^\infty(U)$, если U ограничено, то функции ρ, Λ, C могут быть взяты сколь угодно малыми и сигнатура метрики не меняется.

Какой смысл имеют «скрытые» параметры $a \in \mathbb{R}^n$? Можно предположить, что они говорят нам о существовании дополнительных размерностей, число которых может изменяться. Для нахождения коэффициентов ρ_1, Λ_1, C_1 на стадии $\ell C^\infty(\mathbb{R})/\{a^2\}$, $\rho_{i_1,\ldots,i_l}, \Lambda_{i_1,\ldots,i_l}, C_{i_1,\ldots,i_l}$ на стадии $\ell J_n^k = lC_0^\infty(\mathbb{R}^n)/m^{k+1}$, функций $\rho(a_2), \Lambda(a_2), C_(a_2)$ на стадии $\ell C^\infty(\mathbb{R}^2)/\{a_1 - a_2\}$, возможно, должны применяться многомерные уравнения Эйнштейна. Другими словами, 4-мерная синтетическая (интуиционистская) теория содержит в себе несчетное число многомерных теорий. Инфинитезимальное поле в соответствующей 4-мерной Вселенной может оказаться неслабым в соответствующей «скрытой» геометрии. Интуиционистская логика дает новое представление о природе Мира.

Литература

1. Bunge M., Heggie M. *Syhthetic calculus of variations* // Contemporary Mathematics. 1984. V.30. P.30–62.
2. Isham C.J. *Topos Theory and Consistent Histories: The Internal Logic of the Set of all.* – Paper gr-qc/9607069 (1996).
3. Isham C.J. and Butterfield J.*Some possible Roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quantum Gravity.* – Paper gr-qc/9910005 (1999).
4. Johnstone P. *Topos Theory.* Academic Press, 1977.
5. Kock A. *Synthetic Differential Geometry.* Cambridge University Press, 1981.
6. Lavendhomme R. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry.* Kluwer. 1996.
7. MacLane S., and Moerdijk I.*Sheaves in Geometry and Logic.* Springer-Verlag. 1994.
8. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* Springer-Verlag, 1991.
9. Raptis I. *A Non-Classical Linear Xenomorph as a model for Quantum Causal Space.* – Paper gr-qc/9909056 (1999).
10. Raptis I. *Non-Commutative Topology for Curved Quantum Causality* // in preparation.
11. Raptis I. *Non-Classical Linear Xenomorph as Quantum Causal Space and the Quantum Topos of Finitary Spacetime Schemes of Quantum Causal Sets* // in preparation.
12. Trifonov V. *Linear Solution of the Four-Dimensionality Problem* // Europhys. Lett. 1995. V.32. №8. P.621-626.
13. Синг Дж. *Общая теория относительности.* М.: ИЛ, 1963.
14. Гуц А.К. *Теоретико-топосный подход к основаниям теории относительности* // Докл. АН СССР. 1991. Т.318. №6. С.1294–1297.
15. Гуц А.К. *Интуиционисткая теория пространства-времени* // Международная геометрическая школа-семинар памяти Н.В.Ефимова: Тезисы докладов. Ростов-на Дону, 1996. С.87–88.
16. Гуц А.К. *Вакуумные уравнения Эйнштейна в синтетической дифференциальной геометрии Ловера-Кока* // Тезисы X Российской гравитационной конференции. Владимир, 1999.
17. Гуц А.К., Звягинцев А.А.*Интуиционистская логика и сигнатура пространства-времени* // Логика и приложения: Международ. конференция, посвящ. 60-летию Ю.Л.Ершова. Тезисы докладов. Новосибирск: Ин-т дискрет. мат-ки и информатики, 2000. С.38–39.
18. Zvyagintsev A.A. *Einstein's equations in Synthetic Differential Geometry* // Proc. Int. Conf. "Geometrization of Physics IV". Kazan State University. Kazan. October 4–8. 1999.