О множественности геометрий и множественности физик

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

ПРОБЛЕМЫ И ОСОБЕННОСТИ
СОВРЕМЕННОЙ НАУЧНОЙ МЕТОДОЛОГИИ

СВЕРДЛОВСК, 1979

Р.О. ди Бартини, П.Г. Кузнецов

Современная наука, включая физику, представляет собой «развивающийся организм», в рамках которого все время сохраняется тенденция к открытию новых, ранее неизвестных законов природы. Исследование закономерностей развития физики с необходимостью предполагает внимательное отношение к проявляющимся в ней методологическим тенденциям, одной из которых выступает «геометризация физики», рассматриваемая в предлагаемой статье с новой точки зрения.

В настоящее время существенно изменилось представление о геометрии: никто не отождествляет термин «геометрия» с тем, что называлось этим словом до Лобачевского или с тем, что называлось этим словом до Гильберта. Теперь термин «геометрия» используется для обозначения множества различных геометрий, каждая из которых отличается от других по крайней мере одной аксиомой. Рассматривая взаимосвязь современной математической физики и геометрии в широком смысле этого слова, мы оказываемся перед сложным выбором: превратится ли современная математическая физика в одну из разновидностей геометрии или развитие науки приведет к пониманию физики, как множества разных физик?

При первой постановке вопроса мы должны искать единственную геометрию, которая будет является адекватным отображением нашего физического мира. При второй постановке мы стоим перед соотнесением каждого класса физических явлений с той или иной из многочисленных геометрий. При решении первой проблемы мы связываем всю физику с одной геометрией при одном и том же фиксированном наборе аксиом. При решении второй проблемы мы строим «здание» всей физики по частям: каждой части его соответствует та или иная геометрия. Сам же процесс построения здания всей физики оказывается так же далек от завершения, как далеко от завершения здание всеохватывающей геометрии.

Существует мнение, что Анри Пуанкаре имел все основания для создания специальной теории относительности, но… это было сделано не им, а А.Эйнштейном. Не отвергая этого мнения, мы тем не менее полагаем, что Анри Пуанкаре придерживался второй точки зрения на связь физики и геометрии и именно в силу этого убеждения не позволил себе отдать предпочтение одной частной геометрии как единственной геометрии, которая и согласуется со всеми видами физической реальности. Приведенный А.Пуанкаре список возможных геометрий, который присутствует в отзыве на работы Д.Гильбарта, достаточно убедительно это подтверждает. Мы приведем только два отрывка из работ Пуанкаре.

В 1887 г. он писал: «Согласно тому, что нами выше было сказано, геометрия есть не что иное, как изучение некоторой группы движений, и в этом смысле можно сказать, что справедливость геометрии Евклида нисколько не противоречит справедливости геометрии Лобачевского, так как существование одной группы вполне совместимо с существованием другой.

Мы выбрали между всеми возможными группами одну особенную для того, чтобы к ней относить физические явления, подобно тому, как мы выбираем систему трех координатных осей, чтобы к ним относить геометрические фигуры. Что же определило наш выбор? Это, во-первых, простота выбранной группы; но есть и другое основание: в природе существует замечательные тела, называемые твердыми, и опыт говорит нам, что связь различных возможных перемещений этих тел выражается со значительной степенью приближения теми же самыми соотношениями, как и различные операции выбранной группы. Таким образом, основные гипотезы геометрии не суть факты, добытые из опыта; но наблюдение над некоторыми физическими явлениями приводит в выбору именно их из числа возможных гипотез» [1] .

Здесь Пуанкаре достаточно ясно отмечает связь между аксиомами геометрий и «наблюдением над некоторыми физическими явлениями». Очевидно, что другие наблюдения над другими физическими явлениями будут приводить нас к аксиомам и соответственно к геометриям другого вида. Смена наблюдаемых классов физических явлений будет приводить к смене аксиом и построенных на этих аксиомах геометрий. Всеохватывающая аксиоматика может быть построена тогда и только тогда, когда все возможные классы явлений нами будут уже изучены.

Второй отрывок из работ А.Пуанкаре позволяет развить ранее высказанные соображения. «Наши идеи о происхождении и значении геометрических истин претерпели очень быструю эволюцию в течение последнего столетия. Исследования Лобачевского, Больаи и Римана открыли новую эру; правда, они не повлияли на тех лиц, слишком многочисленных, которые ищут доказательства постулата Евклида — на них, увы, ничто не могло повлиять, — но они убедили всех истинных ученых в тщетности этих попыток. Таков был первый результат открытия неевклидовых геометрий. Но истинный смысл этого открытия не был выяснен сразу.

Гельмгольц показал сперва, что предложения евклидовой геометрии не что иное, как законы движения твердых тел, тогда как предложения других геометрий суть законы, которым могли бы быть подчинены другие аналогичные тела, которые без сомнения не существуют, но существование коих можно допустить без того, чтобы это привело к малейшему противоречию; такие дела можно было бы даже изготовить при желании…

…Ли продвинул анализ значительно дальше. Он изучал, каким путем могут комбинироваться различные возможные движения некоторой системы или, говоря общée, различные возможные преобразования фигуры. Если рассматривать известное число преобразований и затем комбинировать их всеми возможными способами, то совокупность всех этих комбинаций составит то, что он называет группой. Каждой группе соответствует некоторая геометрия, и наша геометрия, соответствующая группе перемещений твердого тела, есть только весьма частный подход»[2].

Отождествление различных геометрий с соответствующими группами преобразований, осуществленное в блестящих работах Ф.Клейна и С.Ли, позволило сделать следующий шаг. Честь следующего шага выпала на долю Д.Гильберта, о чем очень хорошо сказано в уже цитированной работе А.Пуанкаре.

Однако, хотя заслуга Д.Гильберта весьма велика, он является «классиком» геометрии в том смысле, что связывает группу преобразований всего пространства в себя. Это относится и к классической точке зрения Ф.Клейна и С.Ли.

Дальнейшее развитие геометрии связано с именами Я.Схоутена — Э.Картана с одной стороны и О.Веблена — с другой. Первое направление завоевало широкое признание среди математиков, второе нашло своих приверженцев среди инженеров. Мы сознательно ассоциируем второе направление с инженерами, а не с физиками, хотя всем понятно, что каждый инженер использует именно физические законы при конструировании технических систем.

Хотя идея группы преобразований синтезировала и обобщила все прежние представления о движении и конгруэнтности, хотя она дала принцип классификации, который позволял одним взглядом охватывать все разнообразие важнейших геометрий — эта идея не охватывала всех геометрий. К их числу относились все римановы геометрии. Синтез идей Римана и Клейна и был осуществлен Я.Схоутеном и Э.Картаном: объединяя в одном и том же евклидовом (афинном, проективном т.д.) пространстве два смежных куска риманова пространства, они вводят идею евклидовой (афинной, проективной и т.д.) связности. Теперь понятие группы опирается не на преобразование всего пространства, а только на пространство соответствующей связности. Другой путь поиска и обобщения эрлангенской программы был избран О.Вебленом. Он предложил рассматривать геометрию как теорию пространства с инвариантом (или с «геометрическим объектом» — термин, предложенный Я.Схоутеном в противовес термину «инвариант» — Веблена). Представляет интерес точка зрения О.Веблена на понятие инвариант. «Все, что остается неизменным при преобразовании координат, называется инвариантом. Так, инвариантом является точка, а также кривая или система кривых. Строго говоря, инвариантом является также всякая вещь, например, растение или животное, не имеющее вовсе отношения к рассматриваемому нами пространству. Инвариант, связанный с пространством, т.е. свойство пространства, в смысле п. I гл. II, мы будем называть также геометрическим объектом... Другие примеры геометрических объектов с компонентами — афинные связности и тензоры всех родов»[3].

Мы старались зафиксировать внимание читателя на том, что и «растение или животное» может служить примером инвариантов. Теперь мы можем покинуть мир «чистой геометрии».

Предшествующее изложение должно было дать возможность инженеру и физику увидеть богатство логических теорий, являющихся непротиворечивыми математическими теориями. Различие математических теорий может рассматриваться как различие «геометрий». Сами геометрии могут трактоваться как группы преобразований с инвариантом. Эти фундаментальные понятия мы выделим: 1) группа; 2) преобразование; 3) инвариант.

На базе этих понятий, образующих целостность геометрии или математической теории, и создал свою ветвь тензорного анализа сетей Г.Крон[4]. Относятся они только к математике. Если эти три термина дополнить четвертым «физическая величина», то мы совершим переход от множества геометрий к множеству физик. Используя четвертый термин, мы получаем определение не одной из геометрий, а определение одной из физик.

Группа преобразований, имеющая определенную физическую величину инвариантом — есть одна из физик.

Инвариантом физической величины принято называть закон сохранения определенной физической величины.

Теперь мы должны обратить свое внимание на поиск системы физических величин. Эта система физических величин, если она будет определена правильно, должна порождать систему законов физики, ибо инвариантность этих физических величин и соответствует законам сохранения.

Теория размерностей содержит вопрос о числе ортогональных параметров измерений и мерах их соотношений. Разработанный для отдельных дисциплин науки, он не определяет однозначного выбора первичных единиц области и не объединяет понятия и их величины в единую систему, позволяющую установить общую закономерность соотношений как законов природы. Кроме того, появляющиеся в формулах размерностей дробные показатели при использовании первичных величин $[LMT]$ лишены всякого физического содержания и логического смысла.

В кинематической системе измерений $[LT]$ первичной единицей является квант поля, радиус мировой инверсии протяженности l и длительности t, определяемый экспериментально с большой степенью точности. Обозначая фундаментальное отношение l/t, равное величине фундаментальной скорости буквой C, имеем следующую общую структурную формулу всех физических величин:

$$D^{\sum n} = C^{\gamma} T^{n} = L^{\gamma} T^{n-\gamma},$$

где $D^{\sum n}$ обозначает димензиональный объем физической величины;
$\sum n$ — сумма показателей в формуле размерностей;
T — радикал размерностей;
n и γ — целые числа.

Такая кинематическая система физических величин, которая опирается на две основных единицы (каждая из которых квантуется) — на единицы длины $[\mathrm{L}]$ и единицу времени $[\mathrm{T}]$, была предложена одним из авторов настоящей статьи [5] (см. таблицу). Хотя понятие длина и не предполагает направление, тем не менее в кинематической системе физических величин предполагаются векторные (ориентированные) величины длины и времени, образующие шестимерное многообразие. Это означает, что с каждым из трех пространственых направлений ассоциировано свое собственное ориентированное время. Проще всего ознакомиться с новыми понятиями, если рассмотреть формальную запись для кинематики движущейся точки. Пройденный точкой путь в одномерном движении можно представить бесконечным степенным рядом:

$$S(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots,$$

где $S(t)$ — пройденный точкой путь;
a_0 — начальное смещение;
a_1 — скорость движения точки;
a_2 — ускорение точки;
a_3 — изменение ускорения точки
и т.д.

Если от одномерного движения точки перейти к трехмерному пространственному движению, то общий вид уравнений движений не изменится, а текущие индексы будут пробегать три значения, как по пространственным координатам, так и по координатам времени:

$$S^{\alpha}(t) = a^{\alpha} + a^{\alpha}_{\beta} t^{\beta} + a^{\alpha}_{\beta\gamma} t^{\beta} t^{\gamma} + a^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} t^{\beta} t^{\gamma} t^{\delta} + \ldots,$$

где a^{α}_{β} — скорость движения точки;
$a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — ускорение точки;
$a^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ — изменение ускорения точки
и т.д. $\alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,2,3.$

Анализ размерностей позволяет утверждать, что каждый терм правой части имеет размерность длины, а коэффициенты — размерность $[L^{1}T^{-n}]$, где n есть число ковариантных индексов.

Введенное шестимерное многообразие с самого начала не предполагает равенства масштабов «поперечного» и «продольного» времени, т.е. в нем исключается гипотеза о существовании абсолютного скаляра, называемого «временем».

Соответствие вводимых представлений «духу времени» можно проиллюстрировать позицией Г. Хантли. Если тело движется параллельно оси OX в прямоугольной системе координат, его линейный размер вдоль этой оси, обозначенный как $[L_x]$, связан с сопротивлением трения и вязкостью среды. Поперечные размеры $[L_y]$ и $[L_z]$ прямо связаны с плотностью среды и не зависят от вязкости. Можно показать, что такое придание векторного характера факторам конфигурации тела позволяет найти полное решение задач, для которых ранее анализ размерностей давал лишь частичное решение [6]. Г. Хантли иллюстрирует использование векторных длин на примерах из самолето- и ракетостроения. Нетрудно видеть, что предложение Хантли может рассматриваться как частный случай введенного нами шестимерного многообразия.

Проиллюстрируем роль системы физических величин в выделении тех или иных классов физических явлений, которые мы и отождествляем с частными физиками. (Может быть, точнее было бы говорить об уровнях отображения физической реальности. Однако исторически сложившаяся и еще сохраaняющаяся терминология — «частная теория относительности» и т.д. — делает подобное словоупотребление на сегодня приемлемым. *Прим. ред.*).

Рассмотрим класс физических явлений, который характерен тем, что скорость изменения площади является постоянной величиной. Это класс явлений в свое время был установлен Кеплером в форме: «Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади». Рассмотрим ряд, характеризующий изменение площади во времени, в виде:

$$S^{\alpha\beta}(t) = a^{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta}_{\gamma}t^{\gamma} + a^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}t^{\gamma}t^{\delta} + \ldots,$$

где $S^{\alpha\beta}(t)$ — меняющаяся со временем площадь,
$a^{\alpha\beta}$ — начальное значение площади,
$a^{\alpha\beta}_{\gamma}$ — скорость изменения площади,

$a_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$ — «ускорение» изменения площади
и т.д. $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3.$

Выделим в числе коэффициентов ряда скорость изменения площади и приравниваем этот член постоянной:

$$a_{\gamma}^{\alpha\beta} = const.$$

Перенесем постоянную в левую часть:

$$a_{\gamma}^{\alpha\beta} - const = 0.$$

Заменим выражение в левой части одним символом:

$$W_{\gamma}^{\alpha\beta} = 0.$$

Это и есть не что иное, как закон Кеплера в тензорной форме. Евклидова геометрия, построенная на группе движений абсолютно твердого тела, характеризуется инвариантом расстояния между двумя точками.

Утверждение может быть записано в виде:

$$W^{\alpha} = 0,$$

где W^{α} — и есть инвариант расстояния между точками твердого тела.

Когда мы переходим в класс физических явлений, называемый гидродинамикой несжимаемой жидкости, то, несмотря на то, что из инвариантности расстояния между двумя точками следует инвариантность объема, мы не можем сохранять инварианта евклидовой геометрии. Мы постулируем инвариантность объема, но отказываемся от постулата инвариантности расстояния между двумя точками жидкости. Этот постулат мы записываем в виде:

$$W^{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

где $W^{\alpha\beta\gamma}$ — и есть инвариант объема несжимаемой жидкости.

Выделяя клетку таблицы с размерностью $[L^{3}T^{-2}]$, мы получаем законы сохранения массы, заряда, «магнитной массы», и, кроме того, известный закон Кеплера, согласно которому «отношение куба радиуса планеты к квадрату периода обращения есть величина постоянная».

Выделяя клетку с размерностью $[L^{4}T^{-3}]$, мы получаем закон сохранения количества движения (импульса).

Выделяя клетку с размерностью $[L^{5}T^{-3}]$, мы получаем закон сохранения момента количества движения (момента импульса).

Выделяя клетку с размерностью $[L^5T^{-4}]$, мы получаем закон сохранения энергии.

Выделяя клетку с размерностью $[L^5T^{-5}]$, мы получаем закон сохранения мощности, который был известен еще Дж. Максвеллу.

Некоторые замечания об «ориентированном времени» и «ориентированной временной площади» могут оказаться полезными для дальнейшего развития физических идей. В клетке таблицы с размерностью $[L^3T^{-2}]$ размещается несколько различных физических величин, которые не аддитивны: масса, электрический заряд и «магнитная масса». Однако в этой клетке стоит в знаменателе выражение для «ориентированной временной площади». Составляя парные произведения из трех векторных времен, мы получим три различные временные «площади», которые по определению ортогональны друг другу и поэтому не суммируемы:

$$[t_u\ t_v];\ [t_u\ t_w];\ [t_v\ t_w].$$

Эта «независимость» трех ориентированных временных площадей особенно ясно видна из анализа проблемы взаимодействия, так как «физическое время» мы всегда определяем из движения или взаимодействия. Очевидно, что взаимодействие двух материальных тел допускает три вида независимого взаимодействия:
а) взаимодействие масс

$$F_1 = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

б) взаимодействие их электрических зарядов

$$F_2 = \pm \frac{e_1 \cdot e_2}{\varepsilon r^2},$$

в) взаимодействие их «магнитных зарядов»

$$F_3 = \pm \frac{M_1 \cdot M_2}{\mu r^2}.$$

Эти силы взаимодействия суммируемы, но значения массы, электрического заряда и «магнитного заряда» каждого тела могут изменяться независимо друг от друга. Запишем эти три независимые силы взаимодействия двух тел в симметричной форме:

$$F_1 = \frac{m_1 \cdot m_2}{\left(\gamma^1 r\right)^2}; \quad F_2 = \frac{e_1 \cdot e_2}{\left(\varepsilon^1 r\right)^2}; \quad F_3 = \frac{M_1 \cdot M_2}{\left(\mu^1 r\right)^2},$$

где $\gamma^1 = \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$; $\varepsilon^1 = \sqrt{\varepsilon}$ и $\mu^1 = \sqrt{\mu}$. .

Поскольку нам хорошо известно соотношение

$$C^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0},$$

мы можем положить «симметрично», что $C = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\mu}$;

тогда

$$C^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\mu^2} \text{ и } \lfloor \varepsilon r^2 \rfloor = \lfloor L^1 T^1 \rfloor = \lfloor \mu r^2 \rfloor.$$

«Ориентация» для скорости света как «ориентация вектора» — вещь известная. В знаменателе каждой из симметрично записанных формул присутствует выражение для ориентированной скорости, что и соответствует «ориентированному» времени.

Переходя к распределению масс, мы можем записать выражение для энергии взаимодействия как взаимодействия тел, обладающих массой, игнорируя распределение электрических зарядов и «магнитных зарядов». Подобную процедуру можно выполнить и по полям электрических зарядов и магнитных зарядов, но каждый вид поля будет обладать своей метрикой и характеризоваться своим метрическим тензором. Определим число этих «метрик». Метрический тензор масс обозначим $g_{\alpha\beta}$, метрический тензор электрических зарядов $S_{\delta\gamma}$ и метрический тензор «магнитных масс» $l_{\sigma\pi}$. В парных взаимодействиях полей, поскольку сохраняется «общая энергия», а не энергия «механическая» или «электростатическая», инвариантом будет «свехметрика» декартова произведения двух метрических тензоров. Таких «сверхметрик» будет три:

$g_{\alpha\beta} \times S_{\delta\gamma}$; $g_{\alpha\beta} \times l_{\sigma\pi}$; $S_{\delta\gamma} \times l_{\sigma\pi}$.

Переход от «скоростей» масс, зарядов и магнитных зарядов к обобщенным координатам и требует введения трех независимых ориентированных времен. Обычное скалярное ориентированное время, которое имеется нами в виду, можно рассматривать как ориентированный, «временной объем», образуемый смешанным векторным произведением трех временных векторов.

Всем известное неравенство «продольного» и «поперечного» времени в релятивистской динамике уже требовало отказа от «скалярных моделей» времени. В приведенном выше изложении этот факт, противоречащий постулату скалярного времени, используется в качестве аксиомы. Мы принимаем сразу, что масштабы времени по трем направлениям координатных осей могут быть различными.

Естественно, что это формально означает отказ от «однородности» пространства, что очень часто имеет место в технических приложениях.

Рассмотренные нами примеры преследуют цель показать возможность формирования нового научного направления, значение которого как для решения прикладных задач, так и для развития теории трудно переоценить.

---

[1] А. Пуанкаре. Об основных гипотезах геометрии. — Основания геометрии. М., 1956, с. 398.

[2] А. Пуанкаре. Об основных гипотезах геометрии. — Основания геометрии. М., 1956, с. 452–453.

[3] О. Веблен, Дж. Уайтхез. Основания дифференциальной геометрии. М., Изд-во иностр. лит., 1949, с. 70.

[4] См. G. Kron. Non — Riemannian dynamics of rotating electrical machinery.— J. of Mathematics a. Physics, 1934, v. 13, N 2, p. 103–194;
G. Kron. Tensor analysis of networks N.Y., 1939;
Г. Крон. Исследование сложных систем по частям — диакоптика. М., «Наука», 1972.

[5] См. Р. О. ди Бартини. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 4;
Р. О. ди Бартини. Соотношения между физическими величинами. — Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., «Атомиздат», 1966, с. 249–266.

[6] См. Г. Хантли. Анализ размерностей. М., «Мир», 1970.

Статьи

О множественности геометрий и множественности физик

Аркадий Асеев — Блеск и пустота нашего мира

Приложения

Система физических величин Р.О. ди Бартини