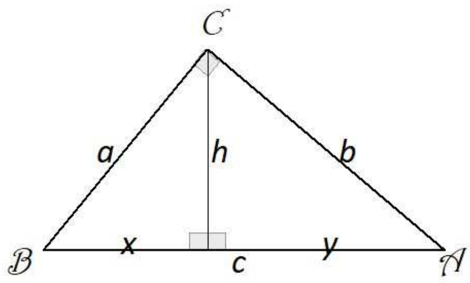
*Древним мореплавателям давно было известно, что неизменно полярная звезда указывает на север. Ее положение на небосводе это ориентация по сторонам света при выборе курса, но, оказывается, это еще не все.*

*Так, чтобы пройти через Гибралтарский пролив, который находится на широте 36°, надо выбрать курс так, чтобы полярная звезда была видна под углом 36°. Чтобы попасть в Крым при входе в Черное море, судну придется идти до широты 44° курсом в направлении на северо-восток.*

*Синусы и градусы для измерения углов придумали мудрецы из древнего Вавилона и выяснили связи между углами и сторонами треугольников.*

## *Лемма о делении гипотенузы высотой*

*Высота, опущенная на гипотенузу* c*, делит ее на отрезки* x *и* y*. Острые углы, лежащие напротив сторон* a *и* b *обозначим как* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$*, а углы при вершине* $C$*, лежащие напротив отрезков* x *и* y*, обозначим как* $C_x$ *и* $C_y$*.*




*Если острый угол в смежном треугольнике это угол* $\mathcal{A}$*, то только углу* $\mathcal{B}$ *равен его другой острый угол, и наоборот. Отсюда* $C_x = \mathcal{A}$ *и* $C_y = \mathcal{B}$*.*

$$\sin C_x = \sin \mathcal{A} \qquad\qquad \sin C_y = \sin \mathcal{B}$$

$$x/a = a/c \qquad\qquad y/b = b/c$$

$$x = a^2/c \qquad\qquad y = b^2/c$$

*Формула самой высоты следует из тождества площади треугольника:*

$$\tfrac{1}{2}ch = \tfrac{1}{2}ab \quad \Longrightarrow \quad h = ab/c$$

*Из достижений культуры древнего Вавилона надо отметить умение вычислять корень квадратный из произвольного числа. Во второй раз этот метод открыл в первом веке нашей эры Герон Александрийский.*

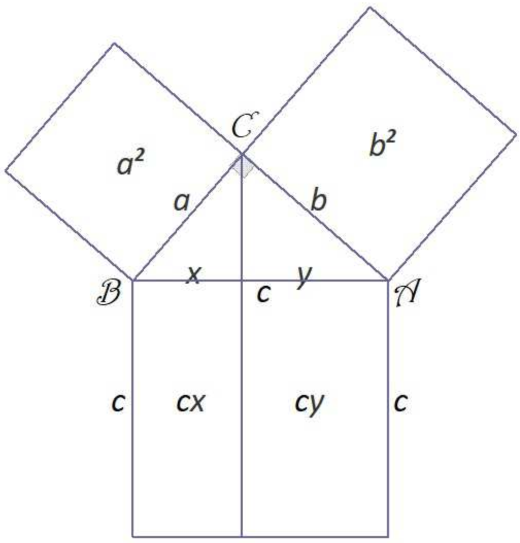
*В третий раз метод в более общей форме был открыт в XVII веке. Он основан на понятии производной. Это метод касательных Ньютона.*

*На развалинах древнего Вавилона сохранилось полмиллиона глиняных табличек с клинописными текстами на аккадском языке. Этот язык стал общепризнанным языком общения. Его знали в Египте и Греции.*

*Полмиллиона это огромная библиотека, которая дает исчерпывающее представление о культуре, искусстве и науке древнейшей цивилизации. Математике посвящены четыреста табличек, но и это тоже немало.*

*По содержанию этих табличек выяснилось, что расчеты основаны на принципах подобия треугольников, на знании теоремы Пифагора, что треугольник, вписанный в полукруг, это прямоугольный треугольник.*

*По свидетельству Геродота таблички с расчетами составляли жрецы. На чем основаны расчеты, было строгой тайной. Тайна была основой их превосходства над остальными. Попытаемся раскрыть их секреты.*




*Как это известно,* $\mathcal{A} = C_x$ *и* $\mathcal{B} = C_y$. *Тогда равны между собой и синусы этих углов. По определению синуса синус острого угла в прямоугольном треугольнике это отношение противолежащего катета к гипотенузе.*

$$\sin \mathcal{A} = \sin C_x \qquad\qquad \sin \mathcal{B} = \sin C_y$$

$$a/c = x/a \qquad\qquad b/c = y/b$$

$$a^2 = cx \qquad\qquad b^2 = cy$$

$$a^2 + b^2 = cx + cy$$

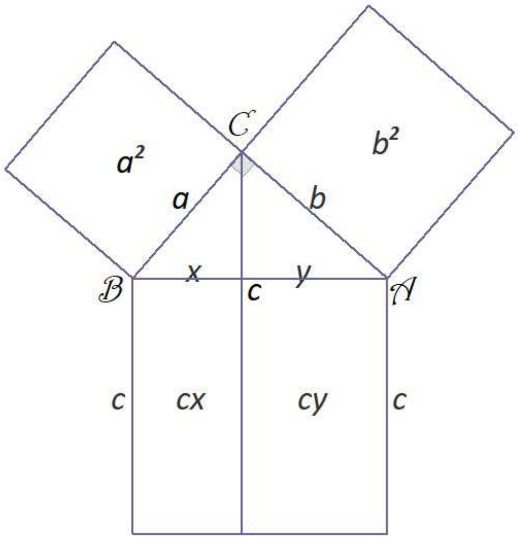
*Нетрудно видеть, что сумма* $cx + cy$ *это и есть квадрат гипотенузы, и*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

*Отношение прилежащего катета к гипотенузе, начиная с античных времен, называли синусом дополнительного угла. Напротив этого угла тоже есть противолежащий катет, и это название вполне оправдано.*

*Но в XVII веке отношение прилежащего катета к гипотенузе назвали косинусом. Следует заметить, что синус острого угла равен косинусу дополнительного угла. И в самом деле, возьмем два острых угла $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.*

$\sin\mathcal{A} = a/c$ *и* $\cos\mathcal{B} = a/c$ $\sin\mathcal{B} = b/c$ *и* $\cos\mathcal{A} = b/c$




*Поскольку синус острого угла равен косинусу дополнительного угла, то*

$$\sin\mathcal{A} = \cos\mathcal{B} \qquad \sin\mathcal{B} = \cos\mathcal{A}$$
$$a/c = a/c \qquad b/c = b/c$$

*Умножим и разделим правую часть первого тождества на* $a$*. Правую часть второго тождества умножим и разделим на* $b$*. Далее получаем:*

$$a/c = (a^2/c)/a \qquad b/c = (b^2/c)/b$$
$$a/c = x/a \qquad b/c = y/b$$
$$a^2 = cx \qquad b^2 = cy$$
$$a^2 + b^2 = cx + cy$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

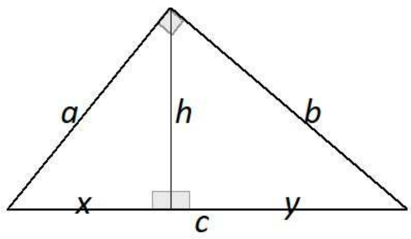
*Измерить высоту дерева можно по ее тени. Надо поставить шест и измерить длину его тени. Если шест вдвое меньше тени, то и дерево вдвое меньше своей тени. Это принцип подобия, известный в Вавилоне.*

*В смежных треугольниках два угла прямой и острый равны прямому и острому углу внешнего треугольника. Поэтому равны их третьи углы. Одинаковые по форме, но разные по размеру треугольники называются подобными. Для обозначения подобия используется символ тильда (~).*

*Стороны двух треугольников, лежащие напротив равных углов, это их сходственные стороны. Если стороны треугольников упорядочить по длине, это обеспечит синхронность чередования сходственных сторон.*

*Нетрудно убедиться, что сходственные стороны пропорциональны, а их отношения* $a/c$, $b/c$ *и* $a/b$ *это коэффициенты подобия треугольников.*

$$\triangle(x, h, a) \sim \triangle(a, b, c) \implies x : a = h : b = a : c = a/c$$
$$\triangle(h, y, b) \sim \triangle(a, b, c) \implies h : a = y : b = a : c = b/c$$
$$\triangle(x, h, a) \sim \triangle(h, y, b) \implies x : h = h : y = a : b = a/b$$




*Из подобия смежных треугольников с внешним треугольником следует:*

$$\triangle(x, h, a) \sim \triangle(a, b, c) \qquad \triangle(h, y, b) \sim \triangle(a, b, c)$$
$$x : a = a : c \implies x = a^2/c \qquad y : b = b : c \implies y = b^2/c$$

$$x + y = c$$
$$a^2/c + b^2/c = c$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

*Еще одно доказательство следует из подобия смежных треугольников:*

$$\triangle(x, h, a) \sim \triangle(h, y, b)$$

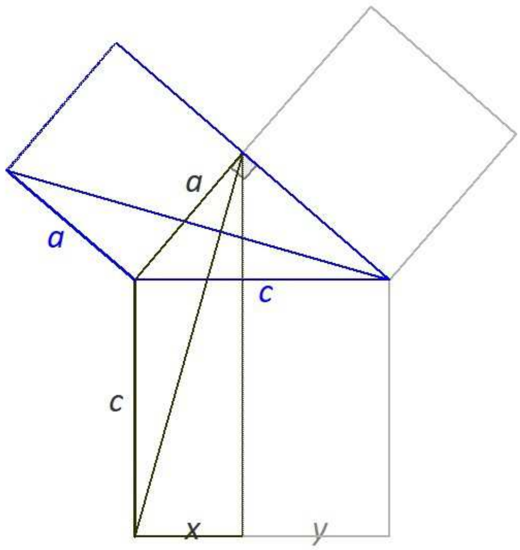
$$x : h = a : b \implies x = ha/b \qquad h : y = a : b \implies y = hb/a$$
$$x = (a^2b/c)/b \implies x = a^2/c \qquad y = (ab^2/c)/a \implies y = b^2/c$$

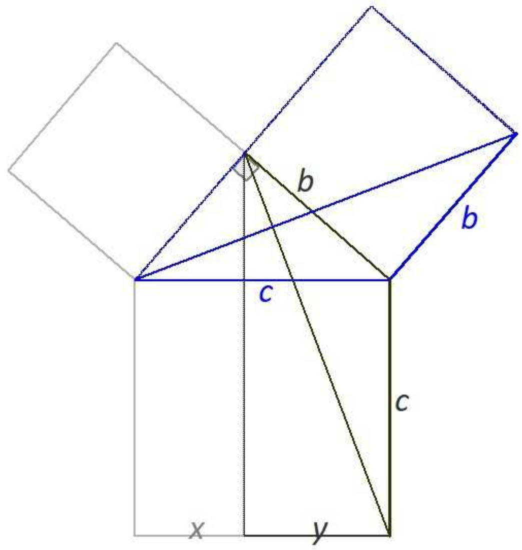
$$x + y = c$$
$$a^2/c + b^2/c = c$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

*Текст оригинального доказательства теоремы Пифагора был утрачен, но по свидетельствам того времени его содержание все же известно в общих чертах и отразить его смысл остается на современном языке.*

*На двух чертежах изображены треугольники с общими вершинами при их тупых углах. Треугольники равны, поскольку поворот одного из них к другому вокруг общей вершины приводит к совпадению всех их сторон.*

*Треугольники вписаны в прямоугольные трапеции. Меньшая сторона из двух параллельных сторон трапеции служит основанием треугольника, поэтому высота треугольника равна прямоугольной стороне трапеции.*






*Треугольники с общей вершиной равны, и треугольник с основанием* a *и высотой* a *по площади равен треугольнику с основанием* c *и высотой* x*.*

$$\tfrac{1}{2}\, a^2 = \tfrac{1}{2}\, cx$$

*Треугольники с общей вершиной равны, и треугольник с основанием* b *и высотой* b *по площади равен треугольнику с основанием* c *и высотой* y*.*

$$\tfrac{1}{2}\, b^2 = \tfrac{1}{2}\, cy$$

*Складывая дважды полученные равенства, приходим к искомому итогу.*

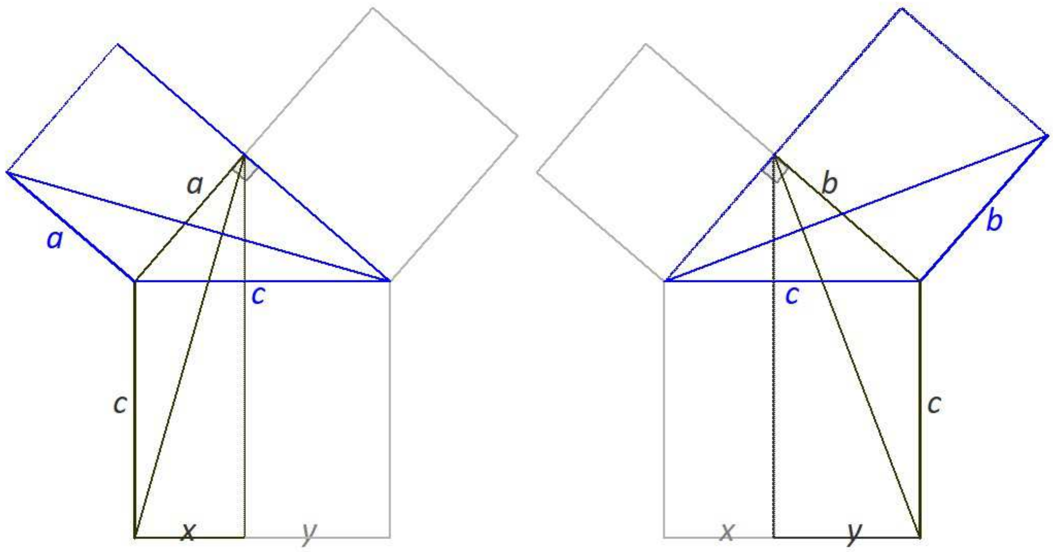
$$a^2 + b^2 = cx + cy$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

*В этом доказательстве соединились разные стили и эпохи, и поэтому здесь никак не отражен античный стиль словесного описания формул.*

*Как приблизительно выглядело доказательство Пифагора остается судить по переработанному Евклидом доказательству этой теоремы.*

*Тупые углы двух треугольников с общей вершиной равны сумме острого и прямого угла или квадрата катета, или квадрата гипотенузы. Тогда эти треугольники равны по двум сторонам и тупому углу между ними.*

*Треугольники вписаны в прямоугольные трапеции. Меньшая сторона из двух параллельных сторон трапеции служит основанием треугольника, поэтому высота треугольника равна прямоугольной стороне трапеции.*




*Треугольник со сторонами* a *и* c *вдвое меньше квадрата катета* a *по их общему основанию* a *и высоте* a*. Треугольник со сторонами* a *и* c *вдвое меньше прямоугольника со сторонами* c *и* x *по их основанию* c *и высоте* x*. Но треугольники равны, поэтому равны и их вдвое большие площади.*

*Как итог, площадь прямоугольника со сторонами* c *и* x *равна квадрату катета* a*. В сравнениях на другом чертеже нет смысла. Понятно, что площадь прямоугольника со сторонами* c *и* y *равна квадрату катета* b*.*

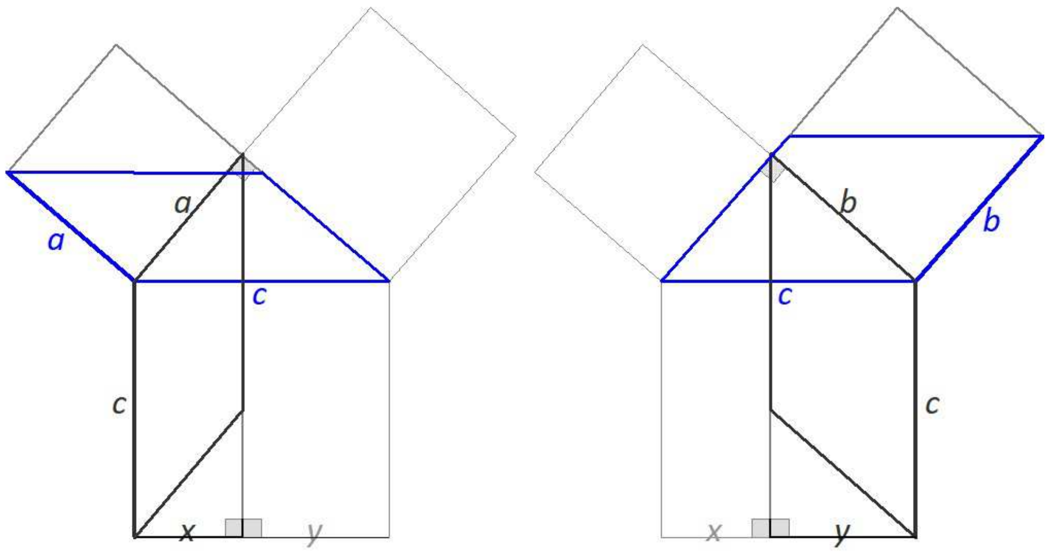
*Надо думать, сумма квадратов катетов равна сумме прямоугольников. Вместе с тем, сумма прямоугольников это и есть квадрат гипотенузы. Следовательно, сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.*

*Из всех доказательств этой теоремы доказательство под редакцией Евклида вошло в первый том Начал Евклида. Оно так удачно, что от предыдущего наследия не сохранилось ничего кроме названия теоремы.*

*Чертеж прямоугольного треугольника с катетами* $a$ *и* $b$, *гипотенузой* $c$ *и их квадратами для наглядности разделен на две части. Произвольный треугольник легко достроить до параллелограмма, что здесь и сделано.*

*Тупые углы параллелограммов с их общей вершиной состоят из общего острого угла треугольника и смежного с острым углом прямого угла, и параллелограммы равны по двум сторонам и тупому углу между ними.*

*Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, где высота это перпендикуляр от основания параллелограмма до его противоположной стороны или же до продолжения этой стороны.*




*По равенству двух параллелограммов параллелограмм с основанием* $a$ *и высотой* $a$ *равен параллелограмму с основанием* $c$ *и высотой* $x$, *поэтому*

$$a^2 = cx$$

*По равенству двух параллелограммов параллелограмм с основанием* $b$ *и высотой* $b$ *равен параллелограмму с основанием* $c$ *и высотой* $y$, *поэтому*

$$b^2 = cy$$

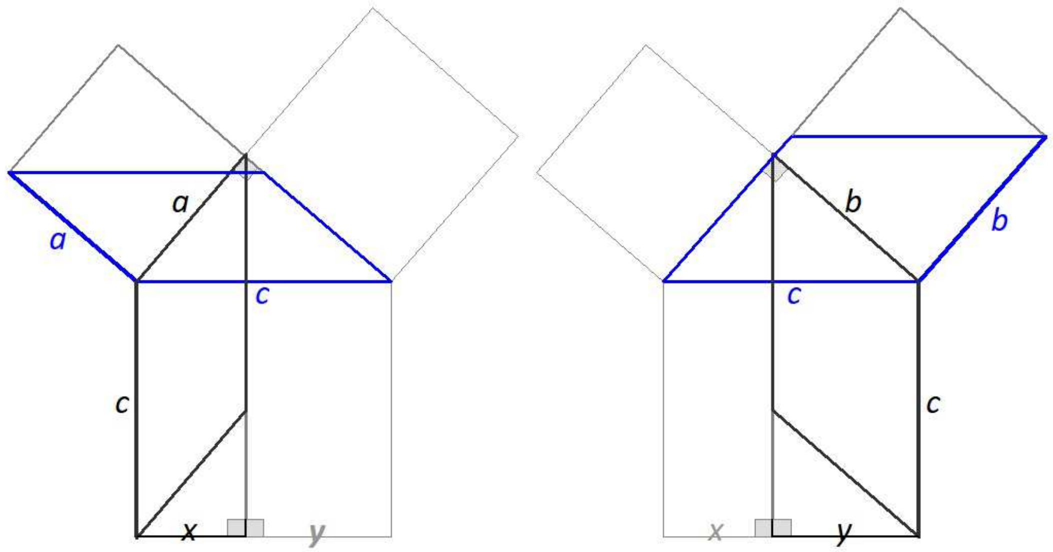
*Как следствие* $x = a^2/c$ *и* $y = b^2/c$. *В этом нетрудно убедиться, если вместо* $x$ *и* $y$ *подставить их значения* $a^2/c$ *и* $y = b^2/c$. *Но продолжим.*

$$a^2 + b^2 = cx + cy$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

*На чертежах изображены параллелограммы. Их тупые углы при общей вершине состоят из общего острого угла и смежного с ним прямого угла. Поэтому они равны по двум сторонам и тупому углу между ними.*

*Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, где высота это перпендикуляр от основания параллелограмма до его противоположной стороны или же до продолжения этой стороны.*




*Следует заметить, что площадь параллелограмма с основанием* a *и высотой* a *равна квадрату катета* a *по общему основанию* a *и общей высоте* a. *По равенству параллелограммов с общей вершиной площадь параллелограмма со сторонами* a *и* c *тоже равна квадрату катета* a.

*Вместе с тем, по площади параллелограмм со сторонами* a *и* c *равен и прямоугольнику со сторонами* c *и* x *по общему основанию* c *и высоте* x. *Тогда площадь этого прямоугольника тоже равна квадрату катета* a.

*Повторять сравнения на другом чертеже нет смысла. Понятно, что площадь прямоугольника со сторонами* c *и* y *равна квадрату катета* b.

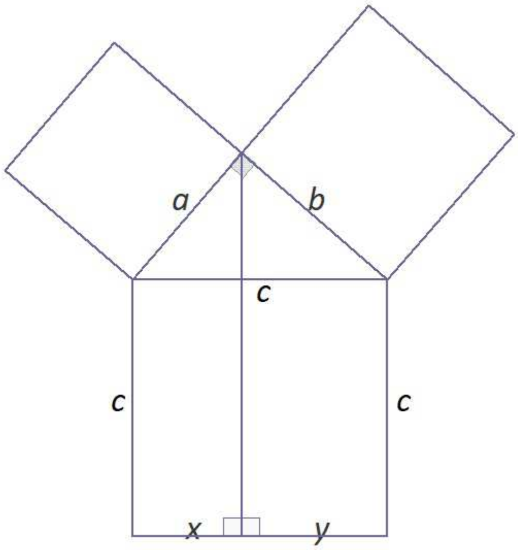
*Надо думать, сумма квадратов катетов равна сумме прямоугольников. В то же время квадрат гипотенузы это и есть сумма прямоугольников. Следовательно, сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.*

*В стиле, основанном на словесном описании формул, доказывали вплоть до эпохи Возрождения. Этот стиль сменила алгебраическая символика. Но в чем ее преимущество, это предмет следующего разбирательства.*

*Начинающего французского адвоката Франсуа Виета, пригласили в дом влиятельного господина для обучения наукам его дочери. По-видимому, тогда ему и пришла идея обозначать абстрактные величины буквами.*

*Введенная в математику алгебраическая символика, позволяет вводить в состав исходной формулы новые символы, что приводит к получению новых формул. При словесном описании формул это было невозможно.*

*Алгебраическую символику он ввел и в геометрию. На чертеже есть все необходимое и ничего лишнего. Катеты прямоугольного треугольника обозначены как* a *и* b, *а гипотенуза* c *состоит из двух отрезков* x *и* y.




*Здесь доказательство теоремы Пифагора начинается с тождеств, в состав которых вводится новый символ* c. *В полученных тождествах выражения в скобках это отрезки, из которых состоит гипотенуза* c.

$$a^2 = a^2 \qquad b^2 = b^2$$

$$a^2 = c(a^2/c) \qquad b^2 = c(b^2/c)$$

$$a^2 = cx \qquad b^2 = cy$$

$$a^2 + b^2 = cx + cy$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

*Алгебраическая символика буквально перевернула математику того времени. Идеи Франсуа Виета подхватили ведущие математики XVI века. Именем Франсуа Виета назван кратер на лицевой стороне Луны.*